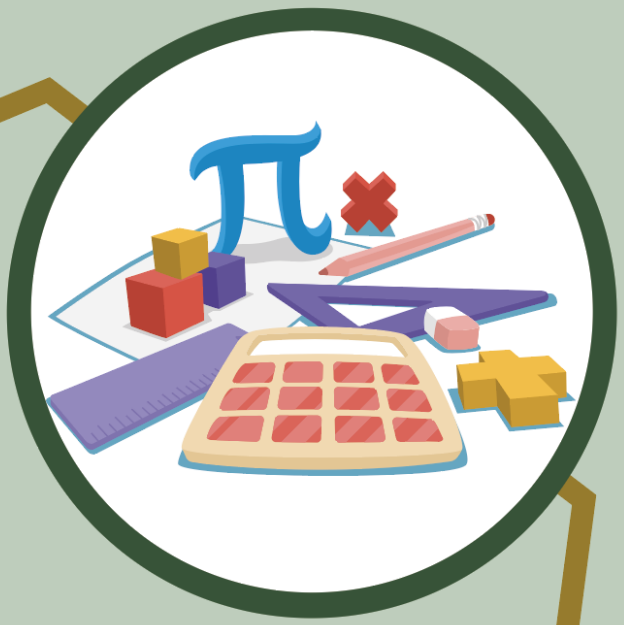
Universidad Autónoma
del Estado de México



# Geometría Analítica

**Libro de texto basado en competencias**

Domingo Hernández García · Ricardo Valdes Camarena
Alejandro Alvarado Catzoli · Pedro Libién Jiménez
José Luis Gerardo Valencia Aguilar
Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova
Alberto Guadarrama Herrera

4º
Semestre

# Geometría Analítica

Libro de texto basado en competencias

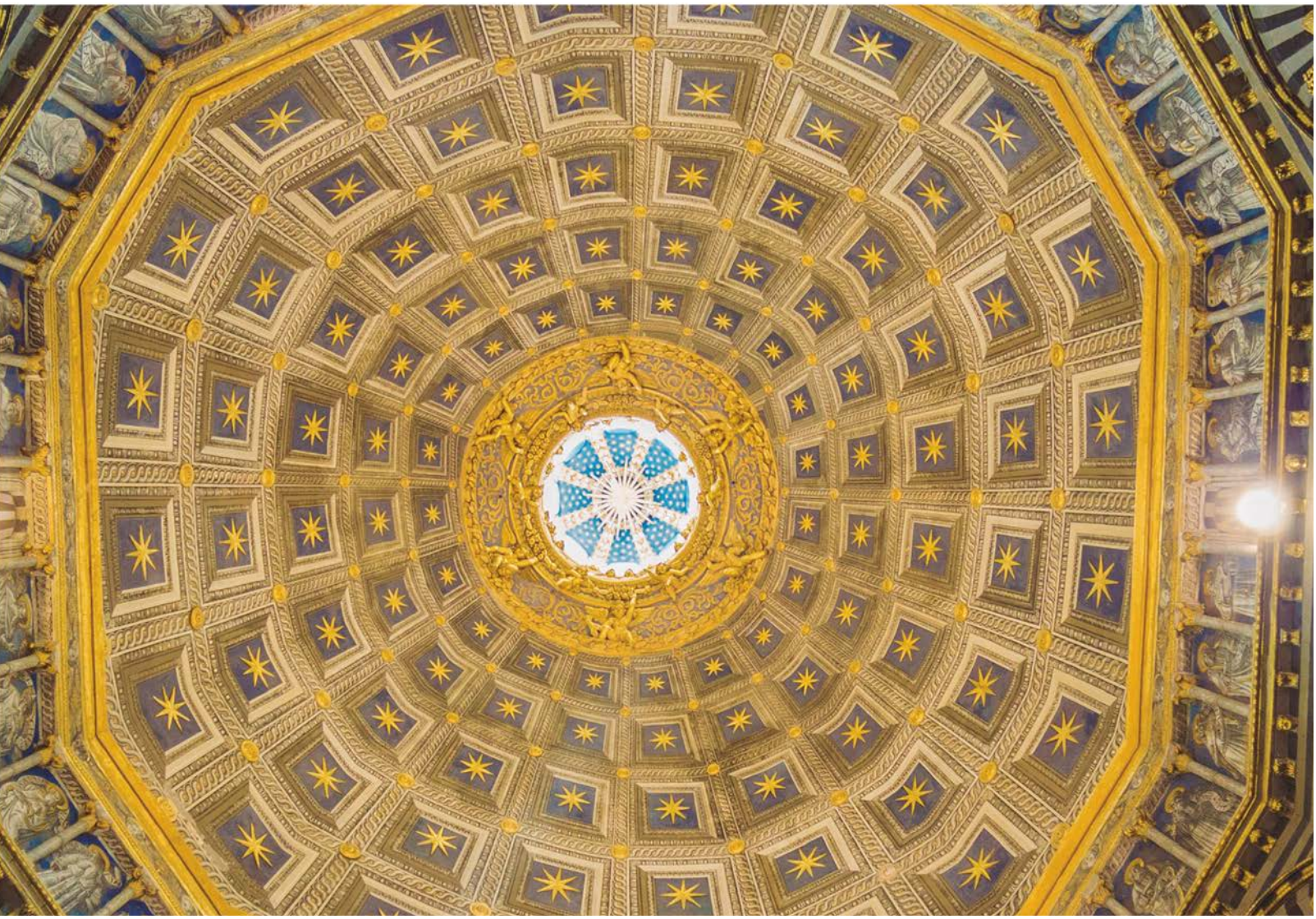
Dirección de Publicaciones Universitarias
*Editorial de la Universidad Autónoma del Estado de México*

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
**Carlos Eduardo Barrera Díaz**
*Rector*

Doctora en Humanidades
**María de las Mercedes Portilla Luja**
*Secretaria de Difusión Cultural*

Doctor en Administración
**Jorge Eduardo Robles Álvarez**
*Director de Publicaciones Universitarias*

Doctora en Investigación Educativa
**Eva Lilia García Escobar**
*Directora de Estudios de Nivel Medio Superior*



# GEOMETRÍA ANALÍTICA

## Libro de texto basado en competencias

Domingo Hernández García
Ricardo Valdes Camarena
Alejandro Alvarado Catzoli
Pedro Libién Jiménez
José Luis Gerardo Valencia Aguilar
Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova
Alberto Guadarrama Herrera

Segunda edición, febrero 2024

GEOMETRÍA ANALÍTICA
Libro de texto basado en competencias

Autores
Domingo Hernández García
Plantel “Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Ricardo Valdes Camarena
Plantel “Lic. Adolfo López Mateos”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Alejandro Alvarado Catzoli
Plantel “Isidro Fabela Alfaro”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Pedro Libién Jiménez
Plantel “Nezahualcóyotl”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
José Luis Gerardo Valencia Aguilar
Plantel “Cuauhtémoc”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova
Plantel “Ignacio Ramírez Calzada”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Alberto Guadarrama Herrera
Plantel “Tenancingo”, de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Universidad Autónoma del Estado de México
Av. Instituto Literario 100 Ote.
Toluca, Estado de México
C. P. 50000
Tel: (52) 722 277 38 35 y 36
http://www.uaemex.mx

El contenido de este material es responsabilidad de los autores, así como el tratamiento basado en competencias realizado a los libros de texto. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra, sin el consentimiento previo y por escrito del editor. La Universidad Autónoma del Estado de México se deslinda de cualquier acción legal derivada de este material.

® Derechos reservados, 2017

ISBN: 978-607-633-765-3

Hecho en México

Responsable del Programa de Diseño y Producción Editorial: L. D. G. Miguel Angel Conzuelo Endeje
Dirección de arte: Víctor del Ángel
Corrección de estilo: Eugenio González Tolentino y Guillermo Roz
Portada e interiores: Ana Carolina Ramírez Góngora y José María Alatriste Galván
Colaboradores: Juan Eleuterio Cristóbal, Zaira Yovana Soto Calderón, Adrián Alcántara Solar y Yadira Almeida

# MENSAJE

A través de su historia, la Universidad Autónoma del Estado de México ha tenido como uno de sus objetivos fundamentales lograr que el estudiantado reciba una educación basada en el libre pensamiento, apelando a un sentido científico. La Escuela Preparatoria de la UAEM continuará mostrándose como un punto de inflexión para la comunidad estudiantil por la calidad de la educación que se ofrece al tiempo que se enseña a adquirir conocimientos, valores, habilidades y destrezas que favorezcan el entendimiento de nuestro entorno social y ambiental.

La responsabilidad de la Universidad Autónoma del Estado de México es asegurar que la educación que se imparte en la Escuela Preparatoria contribuya a ampliar el horizonte personal y profesional de los estudiantes. El enfoque para la apropiación del conocimiento parte de aprovechar la experiencia de vida y desde la autonomía de pensamiento y la reflexión lograr una comprensión más amplia de la realidad.

El material educativo que tienes en tus manos ha sido elaborado colegiadamente entre especialistas de cada una de las áreas del conocimiento. La creatividad, el pensamiento crítico y reflexivo, así como el espíritu científico del claustro de docencia e investigación se reúne en esta antología con el fin de que te acerques al conocimiento con una mirada crítica. Este ejemplar ha sido elaborado con el fin de establecer un aprendizaje dialógico que estimule tu curiosidad, que te sirva como guía, y que invariablemente te provoque pasión por el conocimiento.

El objetivo es lograr que recibas una educación integral e incluyente que incida de manera positiva en tu trayectoria escolar. Por ello es importante que asumas un compromiso personal, empeño y dedicación que te permita apropiarte del conocimiento.

Patria, Ciencia y Trabajo

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
**Rector**

# Índice

## Módulo 1. Línea recta


1. Plano cartesiano y trazo de segmentos ..... 14
   1.1 División de segmento ..... 19
   1.2 Razón de un segmento ..... 22
   1.3 Punto medio ..... 25
   1.4 Puntos de trisección ..... 27
2. Distancia entre dos puntos ..... 31
3. Pendiente de una recta ..... 34
   3.1 Ángulo de inclinación de una recta ..... 34
   3.2 Ángulo entre dos rectas ..... 39
   3.3 Rectas paralelas ..... 42
   3.4 Rectas perpendiculares ..... 45
4. Ecuación de la recta en sus diferentes formas: ..... 47
   4.1 Punto-pendiente ..... 47
   4.2 Pendiente-ordenada al origen ..... 50
   4.3 General ..... 53
   4.4 Simétrica ..... 58
5. Distancia de un punto a una recta ..... 60
6. Problemas de aplicación que involucren elementos de la recta ..... 64


## Módulo 2. Circunferencia


1. Definición de circunferencia como lugar geométrico ..... 85
   1.1 Elementos de la circunferencia y el círculo ..... 86
2. Ecuación de la circunferencia en sus diferentes formas ..... 87
   2.1 Forma ordinaria ..... 87
   2.2 Forma canónica ..... 89
   2.3 Forma general ..... 91

## Módulo 3. Parábola


1. Definición de parábola como lugar geométrico ..... 102
    1.1 Elementos de la parábola ..... 104
2. Ecuación de la parábola en sus diferentes formas: ..... 106
    2.1 Ordinaria ..... 106
    2.2 Canónica ..... 113
    2.3 General ..... 117
    2.4 Reducción de la forma general de la parábola a la canónica u ordinaria ..... 117
3. Determinación de la ecuación de una parábola sujeta a condiciones dadas ..... 128


## Módulo 4. Elipse e hipérbola


1. Definición de Elipse como lugar geométrico ..... 138
    1.1 Elementos de la Elipse ..... 139
2. Ecuación de la Elipse en sus diferentes formas: ..... 141
    2.1 Canónica ..... 141
    2.2 Ordinaria ..... 150
    2.3 General ..... 159
3. Determinación de la ecuación de una elipse sujeta a condiciones dadas ..... 161
4. Definición de Hipérbola como lugar geométrico ..... 164
    4.1 Elementos de la hipérbola ..... 165
5. Ecuación de la hipérbola en sus diferentes formas ..... 166
    5.1 Ordinaria ..... 166
    5.2 Canónica ..... 171
    5.3 General ..... 175
    5.4 Ecuaciones de las asíntotas ..... 178
6. Determinación de la ecuación de una hipérbola sujeta a condiciones dadas ..... 182

Bibliografía ..... 189
Índice de imágenes ..... 189

# Presentación

La **Universidad Autónoma del Estado De México,** a través de la Dirección de Estudios del Nivel Medio Superior, está interesada en que los alumnos de la Escuela Preparatoria, desarrollen al máximo las competencias y egresen con una preparación de máxima calidad. Por ello, se ha preocupado en editar los materiales didácticos que les ayuden a alcanzar esta meta.

Los autores hemos diseñado este libro de texto con el propósito de que tengan un material de apoyo durante el curso de **Geometría Analítica** una herramienta didáctica pensada para que desarrollen un pensamiento crítico, analítico y reflexivo, que ayude a adquirir nuevos conocimientos en la práctica y en los diversos ámbitos de su vida.

El libro se apega al programa de estudios vigente para el cuarto semestre de preparatoria del currículo del Bachillerato 2015, y consta de cuatro módulos.

**Módulo 1: La línea Recta**
**Módulo 2: Circunferencia**
**Módulo 3: Parábola**
**Módulo 4: Elipse e Hipérbola**

En el **módulo 1** se presentan conceptos básicos como: distancia entre dos puntos, pendiente de una recta, y se determinan las diferentes formas de la ecuación de una recta.

En el **módulo 2** se presentan los elementos de una circunferencia, y las diferentes formas de su ecuación.

En el **módulo 3** se presentan los elementos más comunes de la parábola, su determinación, así como las diferentes formas de su ecuación.

En el **último módulo** se presentan los elementos de la elipse e hipérbola, su determinación, así como las diferentes formas de sus ecuaciones.

Los temas que se refieren a cada uno de los módulos están diseñados para que desarrolle competencias genéricas y disciplinares mediante una secuencia pedagógica.

En los cuatro módulos de este libro, el estudiante logrará desarrollar habilidades para solucionar problemas teóricos o prácticos que involucren la línea recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola aplicando e integrando de manera crítica y reflexiva, los conceptos, técnicas y procedimientos básicos de la Geometría Analítica.

**Los autores.**

# Módulo 1

## Línea recta

## Competencias genéricas[1]

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.

1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

[1]Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).

5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

## Competencias básicas y extendidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

6. Cuantifica, representa y contrasta experimentalmente o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

**Propósito**
Desarrollar habilidades para solucionar problemas teóricos o prácticos que involucren la línea recta aplicando e integrando de manera crítica y reflexiva los conceptos, técnicas y procedimientos básicos de la Geometría Analítica.

# INTRODUCCIÓN

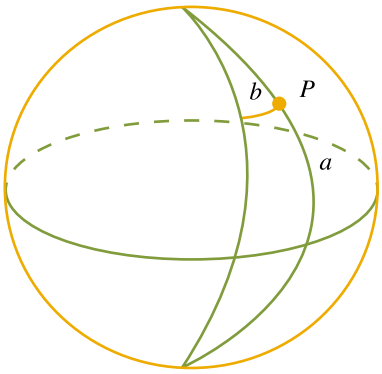
La Geometría, vista en su generalidad, es la rama de las Matemáticas que estudia el espacio, sus características y las figuras que en él se encuentran. El comienzo de las ideas geométricas se remonta a épocas muy lejanas. Los primeros planteamientos son comúnmente adjudicados a las antiguas culturas de babilonia y de Egipto. En su origen, la Geometría se preocupó por resolver problemas prácticos, como el cálculo de longitudes, de áreas y volúmenes. Con el paso de los siglos, la naturaleza y la dificultad de los problemas geométricos se fueron ampliando y los métodos antiguos resultaban insuficientes. En el siglo XVII, los franceses René Descartes (1596 – 1650) y Pierre de Fermat (1601 – 1665) desarrollaron el método de coordenadas, cuya idea fundamental consistía en transformar los problemas geométricos en problemas algebraicos mediante la introducción de los sistemas de coordenadas. En esencia, la idea de este método consiste en expresar las rectas y curvas mediante ecuaciones y, a su vez, las ecuaciones pueden graficarse como líneas o figuras geométricas. Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) fue responsable de constituir lo que actualmente es la Geometría Analítica, pues expuso los problemas de la Geometría en el plano (que hoy conocemos como cartesiano) introduciendo, además de las coordenadas rectangulares en el espacio, las coordenadas polares; también, estudió las transformaciones de los sistemas de coordenadas y clasificó las curvas según el grado de sus ecuaciones. Así, entonces, la Geometría Analítica consiste en la aplicación de las herramientas algebraicas a un problema geométrico bidimensional o tridimensional, de modo que se pueden asociar directamente los resultados obtenidos algebraicamente con los geométricos y viceversa.

En este módulo, se estudiarán diversos conceptos de la geometría junto a las ecuaciones y las aplicaciones de la línea recta.[2]

[2] https://es.scribd.com/doc/33516043/Geometria-Analitica-Algo-de-Historia
http://docentes.educacion.navarra.es/mpastorg/cd_alumno/modeloG/1bach_Ciencias/Datos/Unidades/B3/CDa_1bach_CC_B3_1_mec.pdf

# 1. Plano cartesiano y trazo de segmentos

La necesidad de orientarse condujo a los seres humanos, desde la antigüedad, a confeccionar mapas (o cartas geográficas) y a relacionar un punto terrestre mediante números. En el actual sistema geográfico, cualquier lugar del mundo queda perfectamente determinado si se conoce su latitud "$a$" (distancia al Ecuador) y su longitud "$b$" (distancia al meridiano de Greenwich).




Basado en competencias

Las coordenadas son grupos de números que describen una posición: a lo largo de una línea, en una superficie o en un espacio.

La aplicación *Google Maps*, que inició como una serie de algoritmos que mostraban una imagen del mapa de cierta región determinada, es ahora la herramienta que traza cualquier ruta por donde desplazarse y ayuda a localizar rápidamente las coordenadas de cualquier localidad. Incluso, con ella es posible observar la tierra en 360°.

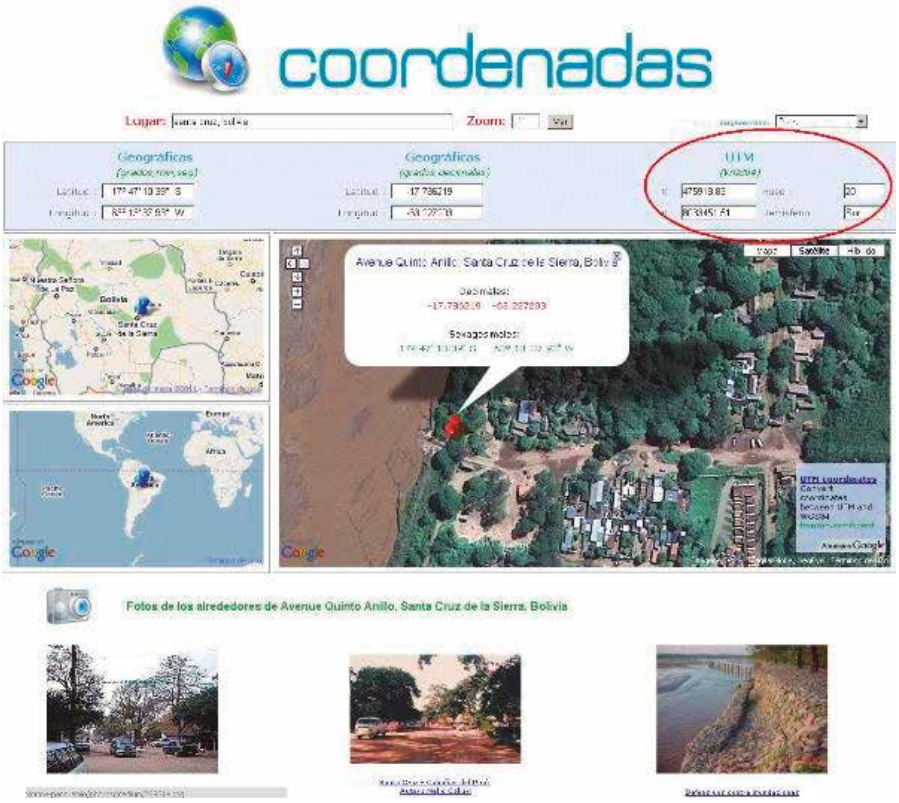
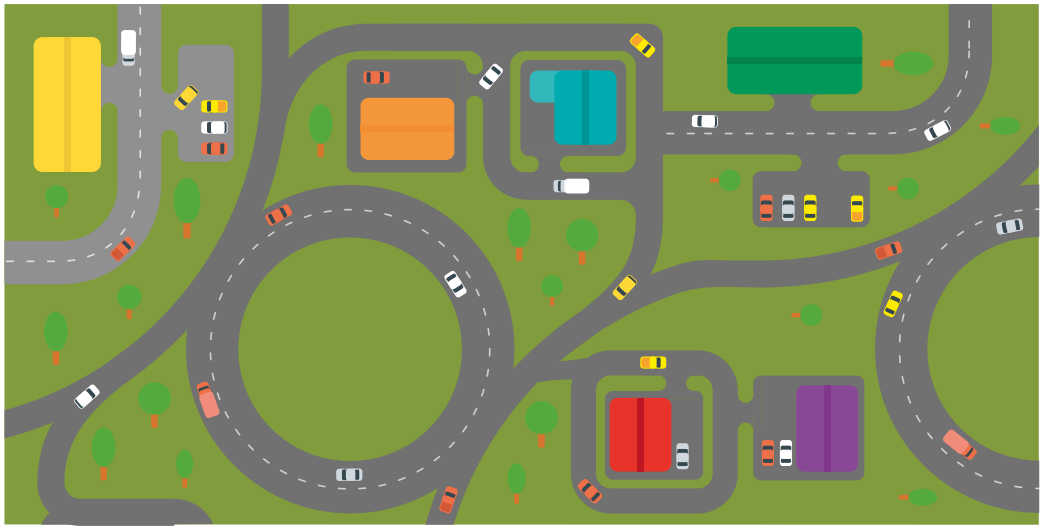
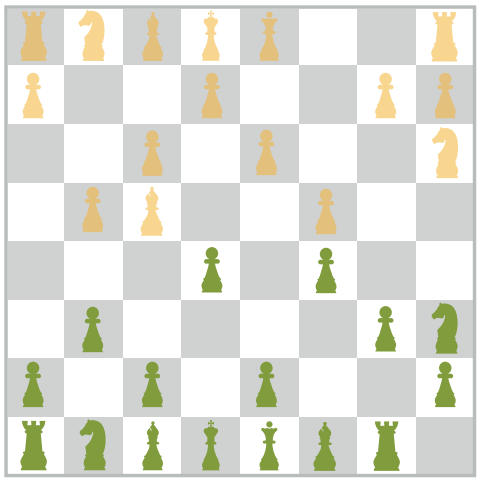



Imagen 1. Coordenadas

La división de colonias en una ciudad también está cuadriculada según coordenadas:

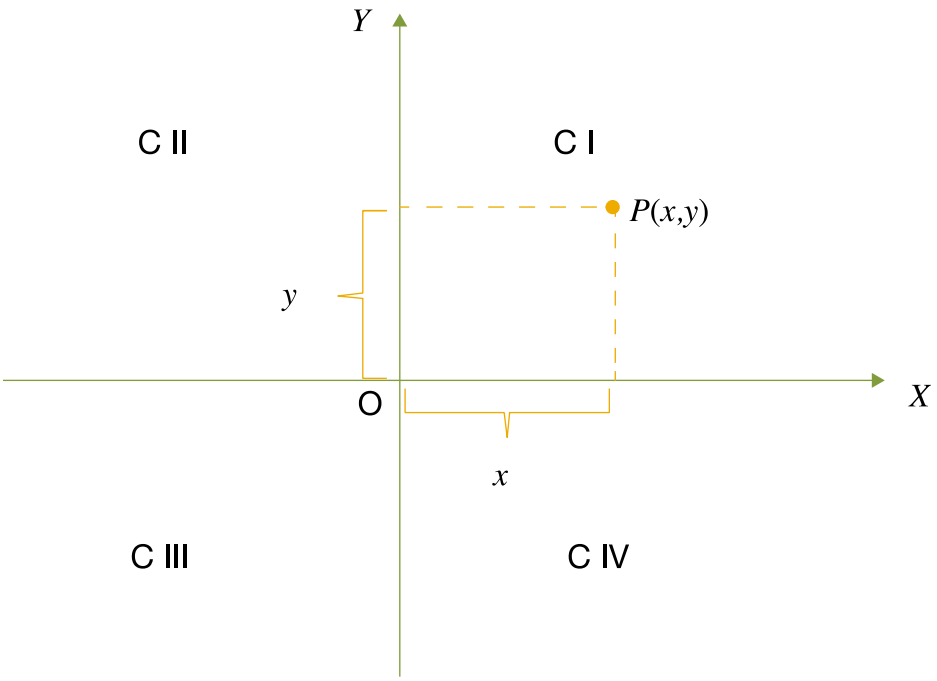


En los juegos como en el ajedrez, también están presentes:



Un punto puede ubicarse en una recta, en un plano o en el espacio y, según donde se encuentre, cambia el sistema de referencia para localizarlo. Si está en una recta, el punto se sitúa a partir de su distancia dirigida desde otro punto fijo convenido de la recta (conocido como origen) y a dicha distancia dirigida se le conoce como **coordenada del punto**.

El plano cartesiano, o sistema coordenado bidimensional, es un sistema de referencia que está formado por dos rectas numéricas perpendiculares entre si que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada **eje de las *abscisas* ($X$)**, y el vertical **eje de las *ordenadas* ($Y$)**; el punto en el que se cortan recibe el nombre de origen. Los ejes dividen al plano en cuatro regiones, llamadas **cuadrantes**, designados por $CI$, $CII$, $CIII$ y $CIV$. Cada punto $P$ del plano está asociado con una pareja de números reales **$(x,y)$** de manera que a cada pareja le corresponde uno y sólo un punto $P$ del plano y viceversa. Al primer elemento "$X$" se le conoce como **coordenada $x$ o abscisa de $P$** y al segundo elemento "$Y$" se le conoce como **coordenada $y$ u ordenada de $P$**. El signo de la abscisa y la ordenada varía según el cuadrante en el que se encuentre el punto, como se muestra en la tabla.




| Cuadrante | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| I | + | + |
| II | – | + |
| III | – | – |
| IV | + | – |

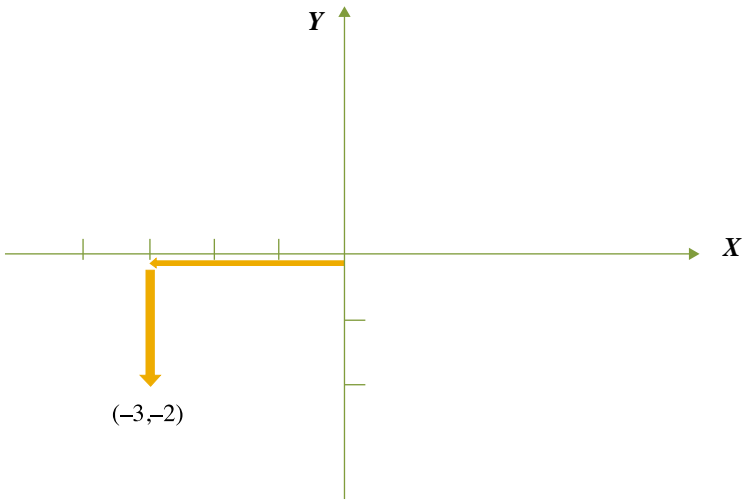
Basado en competencias

El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o parejas ordenadas. Un punto $P$ se puede ubicar en el plano cartesiano con base en sus coordenadas $P(x,y)$ (que se lee **"el punto P de coordenadas $x, y$"**)

Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

1. Para localizar la abscisa o valor de $x$, se cuentan las unidades correspondientes; si es hacia la derecha es positiva; si es hacia la izquierda es negativa. El conteo de unidades se realiza a partir del origen, en el eje $X$.
2. Desde este punto, se cuentan las unidades correspondientes de la ordenada o valor de $y$; si es hacia arriba es positiva, si es hacia abajo es negativa.

Por ejemplo, el profesor Suárez es propietario de un cibercafé que se encuentra en un punto del centro de la ciudad. Supóngase que se desea acudir y es necesario conocer la ubicación exacta. Una vez en el centro de la ciudad, se consulta a un policía recibir indicaciones; éste dice que el sitio queda ubicado a tres cuadras hacia el oeste y dos cuadras hacia el sur. La cantidad de cuadras por caminar pueden entenderse como coordenadas en el plano cartesiano, de modo que su origen se encuentra en el punto de partida, que es donde se preguntó al policía sobre la ubicación del negocio.



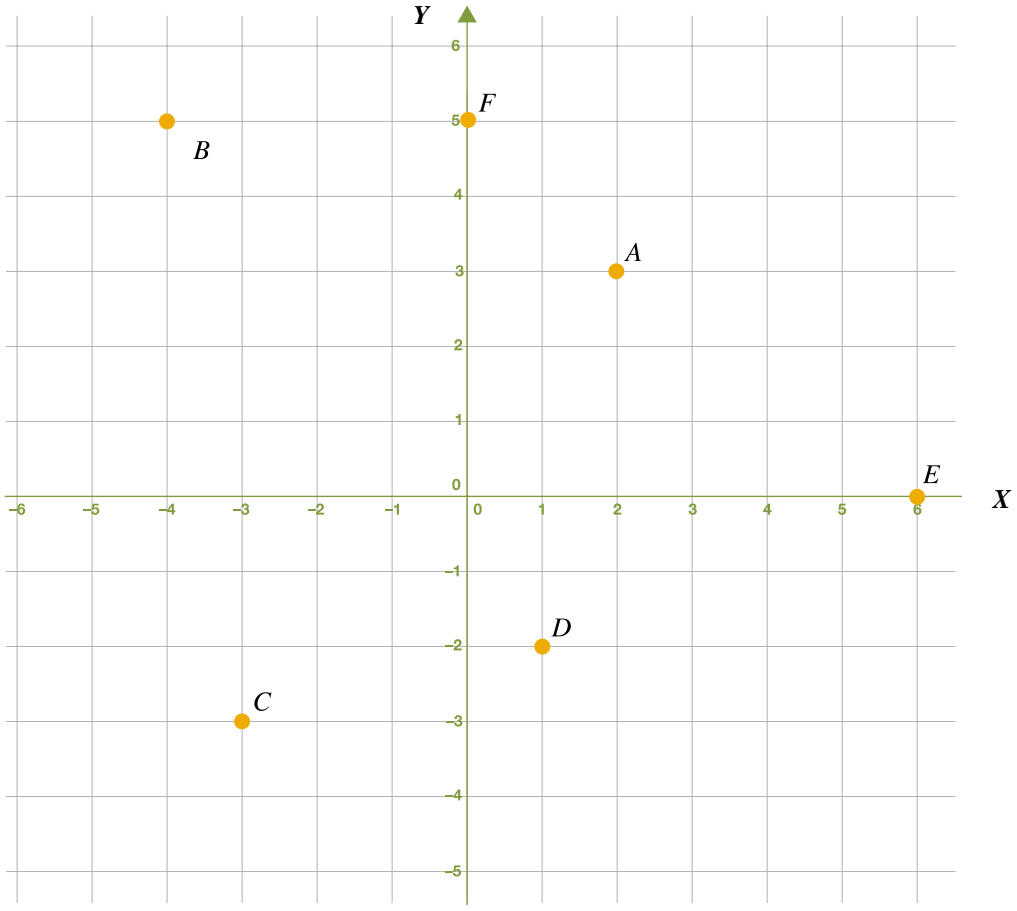

Ejemplo

Localizar en el plano cartesiano los puntos

$A(2,3), B(-4,5), C(-3,-3), D(1,-2), E(6,0)$ y $F(0,5)$

**Solución**

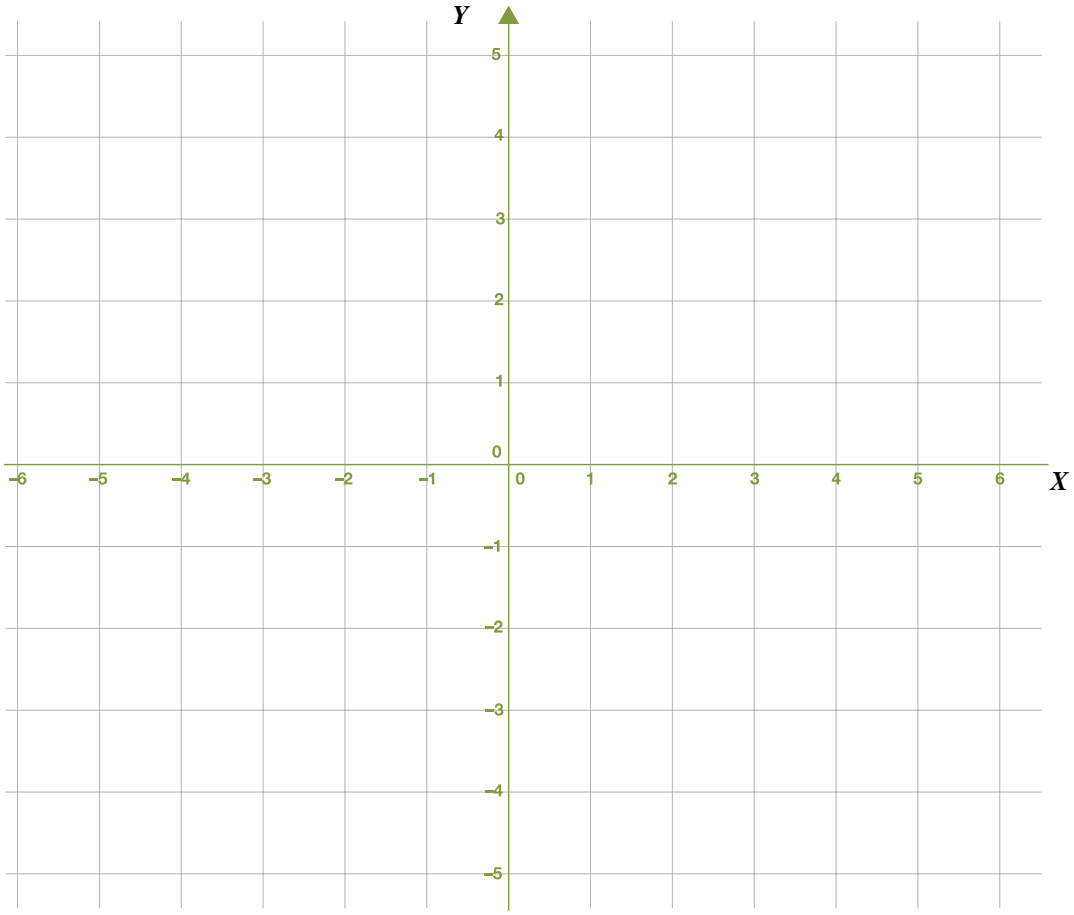
Efectuando el procedimiento señalado, se obtiene lo siguiente:



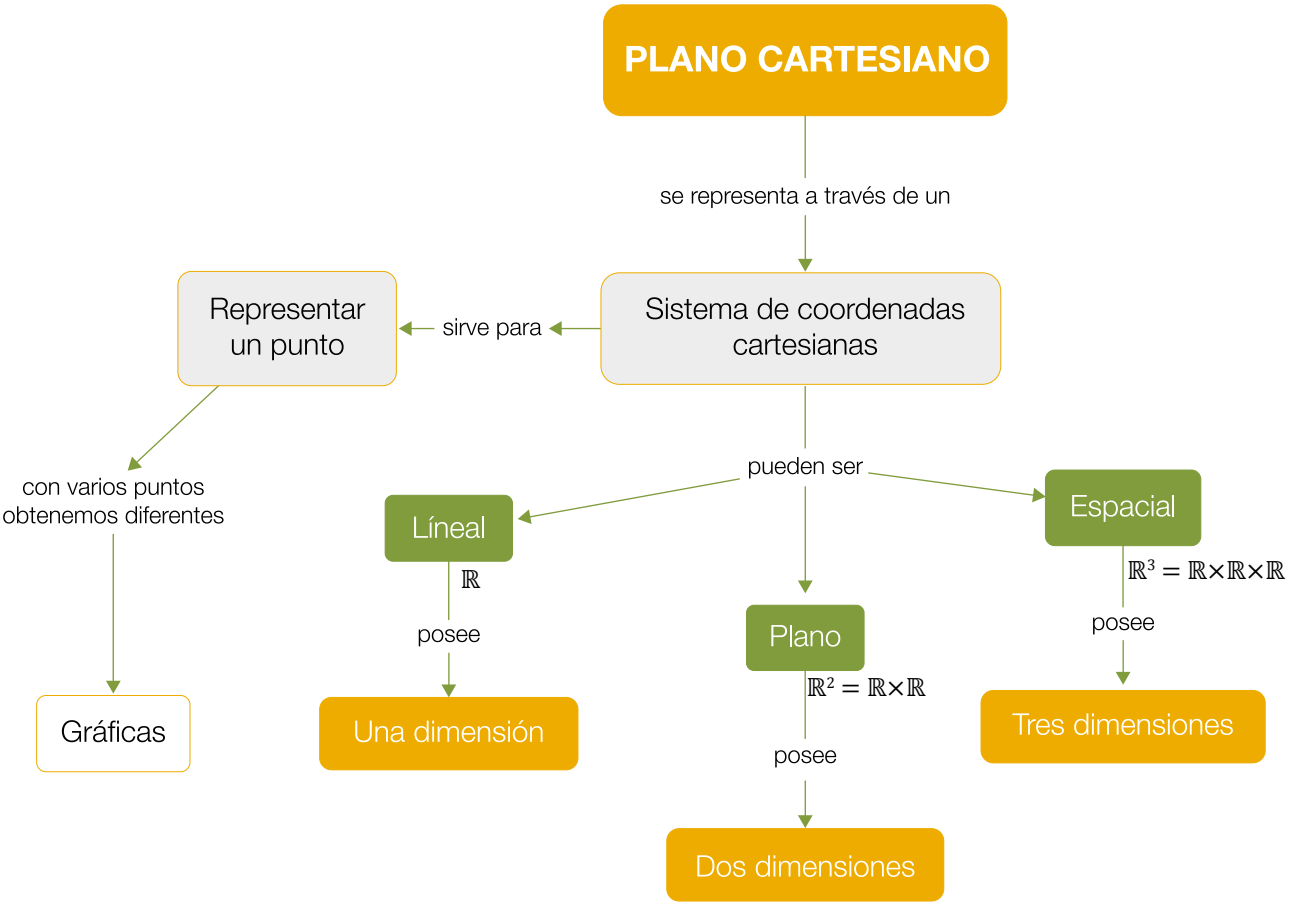
Ejercicio
Módulo 1

Localizar en el plano cartesiano los puntos

$A(3,2), B(-5,4), C(-2,-2), D(2,-4), E(3,0)$ y $F(0,5)$

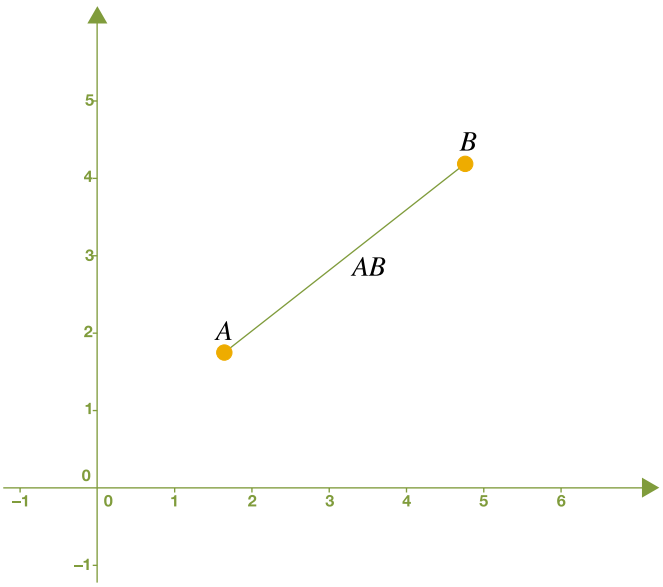



Basado en competencias




## 1.1 División de un segmento

Un segmento rectilíneo es la porción de una recta limitada por dos puntos $A$ y $B$, llamados **extremos**, y se denota como $\overline{AB}$ .



Para trazar un segmento en el plano cartesiano, se localizan las coordenadas de sus extremos y se unen con una línea recta.

Ejemplo

Los puntos marcados en cada inciso corresponden a los extremos de un segmento rectilíneo. Trazar con diferentes colores los segmentos respectivos en el plano cartesiano.

a) $A(-2,6), B(5,1)$

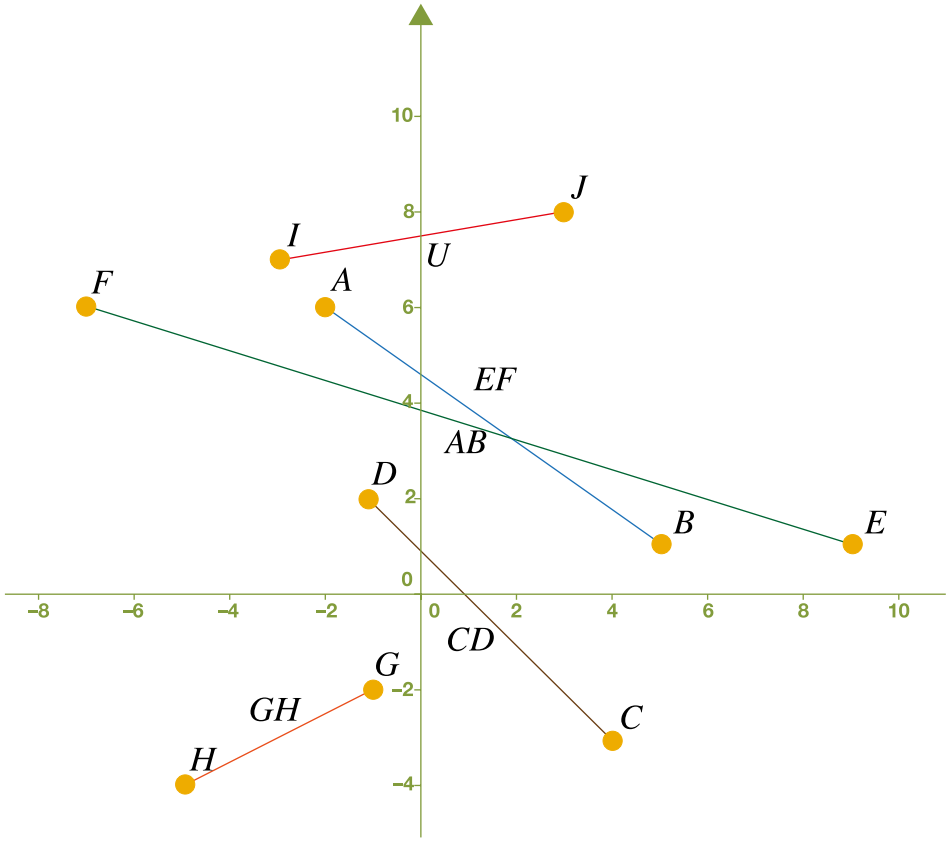
b) $C(4,-3), D(-1,2)$

c) $E(9,1), F(-7,6)$

d) $G(-1,-2), H(-5,-4)$

e) $I(-3,7), J(3,8)$

Solución




Basado en competencias

Ejercicio
Módulo 1

Los puntos marcados en cada inciso corresponden a los extremos de un segmento de recta. Trazar los segmentos respectivos en el plano cartesiano.

a) $A(-2,6), B(5,1)$

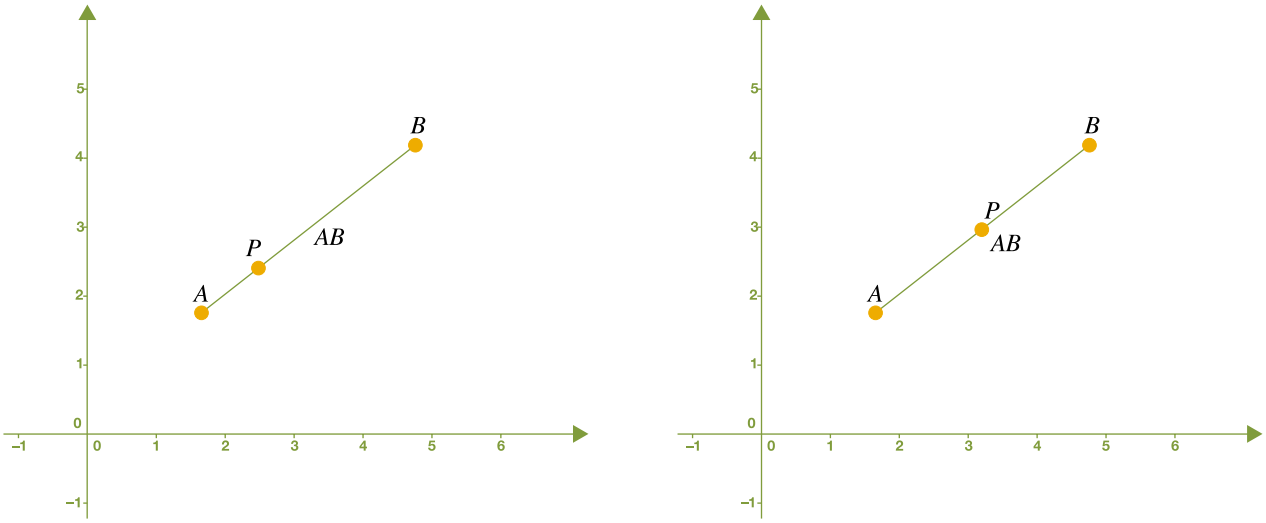
b) $C(4,-3), D(-1,2)$

c) $E(9,1), F(-7,6)$

d) $G(-1,-2), H(-5,-4)$

e) $I(-3,7), J(3,8)$

Por otra parte, un punto $P$ sobre un segmento lo divide en dos partes, en la que una de ellas puede ser mayor o igual que la otra como se observa en las figuras siguientes:




$P$ determina los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$

Las longitudes se pueden comparar mediante un cociente, como se explica en el siguiente apartado.

## 1.2 Razón de un segmento

En Matemáticas, se llama razón (que denotaremos con la letra $r$) a una relación entre dos cantidades de la misma especie y que puede expresarse como un cociente adimensional entre dos números (denominada **razón geométrica**). En este tema, se definirá como razón de un segmento al número de veces que una parte del segmento cabe en todo el segmento, es decir:

$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

Esta razón indicaría que el segmento $\overline{AP}$ cabe $r$ veces en el segmento $\overline{AB}$ o que el segmento contiene $r$ veces al segmento $\overline{AP}$.

Si un segmento se divide en dos partes (que pueden ser iguales o no), se tendrá un punto de división; si se divide en tres partes (que pueden ser iguales o no), se tendrán dos puntos de división, etcétera. Para cada uno de ellos se tendrá una razón diferente.

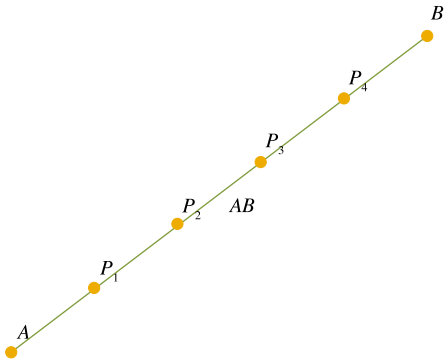
Basado en competencias

Ejemplo

Considerando un segmento $\overline{AB}$ dividido en cinco partes iguales. Obtener las razones para cada punto de división.

### Solución

De la figura siguiente, obsérvese que, si el segmento se divide en cinco partes iguales, se tendrán cuatro puntos de división. Las razones para cada punto, de acuerdo a la definición dada, serán:




$$r_{P_1} = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}$$

(que indica que el segmento $\overline{AP_1}$ es la quinta parte del segmento $\overline{AB}$, o bien que $\overline{AB}$ contiene cinco veces al segmento $\overline{AP_1}$).

$$r_{P_2} = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{AB}} = \frac{2}{5}$$

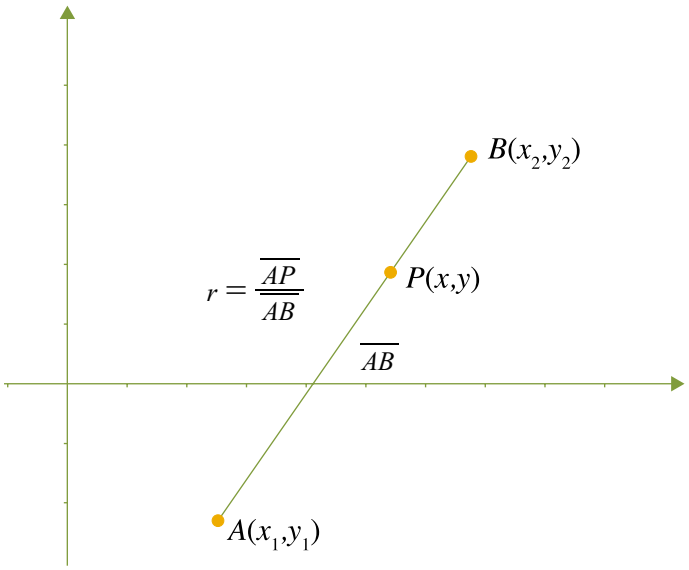
$$r_{P_3} = \frac{\overline{AP_3}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$$

$$r_{P_4} = \frac{\overline{AP_4}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$$

Dado el segmento $\overline{AB}$ dividido en siete partes iguales. Obtener las razones del segundo y quinto punto de división.

**Ejercicio**
Módulo 1

En el sistema bidimensional, las expresiones para determinar coordenadas $(x, y)$ de un punto *P* que divide a un segmento $\overline{AB}$ cuyas coordenadas de sus extremos son $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en la razón $r = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$ son:



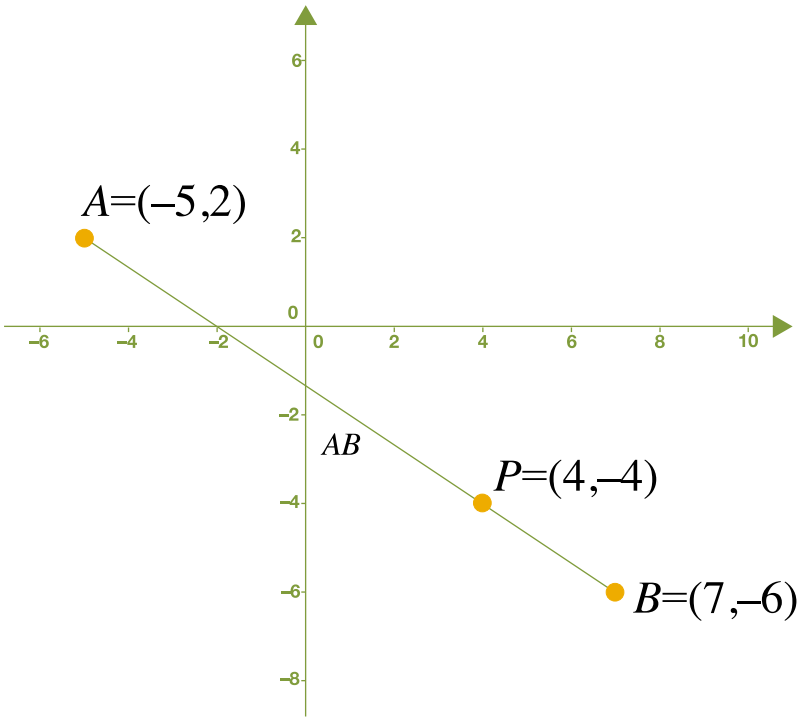

$$x = x_1 + r(x_2 - x_1) \ldots(1) \qquad y = y_1 + r(y_2 - y_1) \ldots (2)$$

Ejemplo

Determinar las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que divide al segmento cuyos extremos son $A(-5,2)$ y $B(7,-6)$ y en la razón $r=\frac{3}{4}$. Graficar.

Solución

| Datos: | Fórmulas: | Sustitución: |
|---|---|---|
| $A(-5,2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = 2 \end{cases}$<br>$B(7,-6) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = -6 \end{cases}$<br>$r=\frac{3}{4}$ | $x = x_1 + r(x_2 - x_1)$<br>$y = y_1 + r(y_2 - y_1)$ | $x = -5 + \frac{3}{4}(7-(-5))$<br>$x = -5 + \frac{3}{4}(7+5)$<br>$x = -5 + \frac{3}{4}(12)$<br>$x = -5 + 9$<br>$x = 4$<br>$y = 2 + \frac{3}{4}(-6-2)$<br>$y = 2 + \frac{3}{4}(-8)$<br>$y = 2 - 6$<br>$y = -4$<br>$\therefore P(4,-4)$ |



Determinar las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que divide al segmento cuyos extremos son $A(5,-1)$ y $B(2,5)$ y en la razón $r=\frac{2}{3}$. Graficar.

## 1.3 Punto Medio

De las expresiones (1) y (2) para determinar las coordenadas $(x,y)$ de un punto $P$ que divide a un segmento en una razón dada, se tiene el caso particular cuando P lo divide en dos partes iguales. En este caso, a P se le llama **punto medio** (denotado por $P_m$) y la razón $r=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$ valdrá $\frac{1}{2}$.

Así, entonces, las expresiones para calcular las coordenadas $(x_m,y_m)$ del punto medio de un segmento, conocidas las coordenadas de sus extremos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, se obtienen sustituyendo $r=\frac{1}{2}$ en las expresiones (1) y (2):

$$x=x_1+\frac{1}{2}(x_2-x_1) \qquad y=y_1+\frac{1}{2}(y_2-y_1)$$

$$x=x_1+\frac{x_2}{2}-\frac{x_1}{2} \qquad y=y_1+\frac{y_2}{2}-\frac{y_1}{2}$$

$$x=\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1}{2}+\frac{y_2}{2}$$

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_m=\frac{y_1+y_2}{2}$$

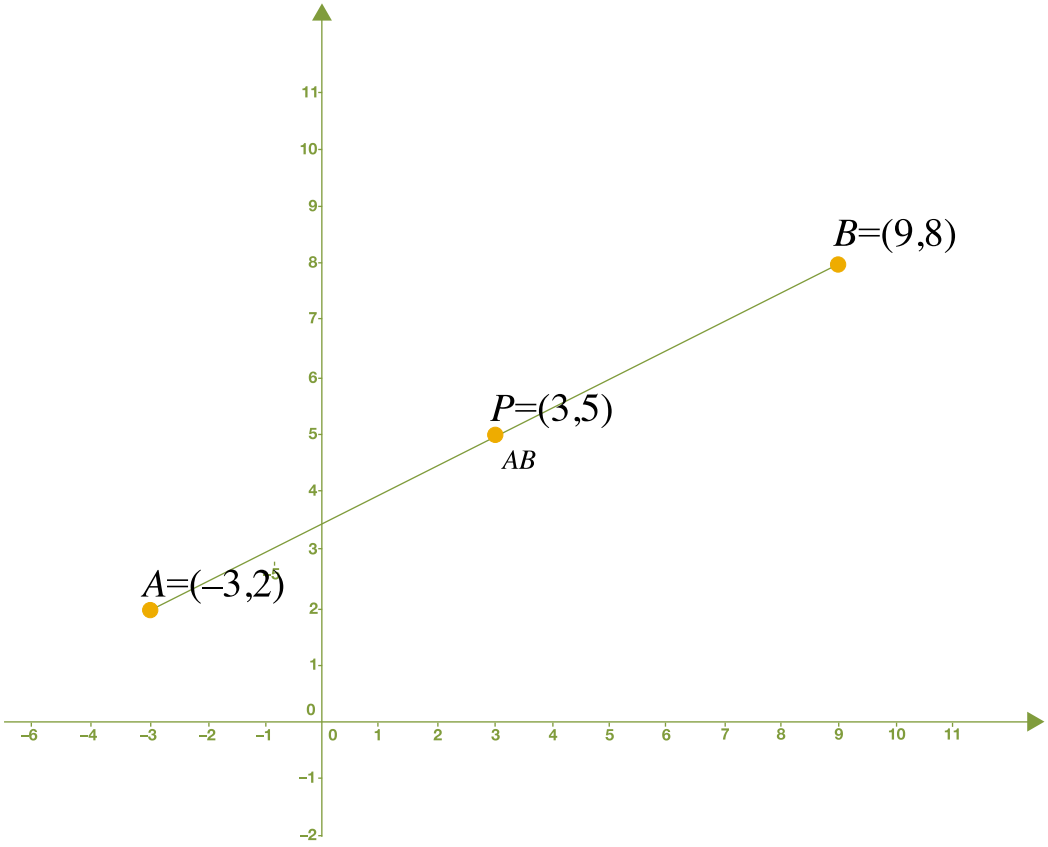
Ejemplo

Calcular las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{MN}$ si $M(-3,2)$ y $N(9,8)$.

**Solución**

| Datos: | Fórmulas: | Sustitución: |
|---|---|---|
| $M(-3,2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 2 \end{cases}$<br>$N(9,8) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 8 \end{cases}$ | $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$<br>$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$ | $x_m = \frac{-3+9}{2}$<br>$x_m = \frac{6}{2}$<br>$x_m = 3$<br>$y_m = \frac{2+8}{2}$<br>$y_m = \frac{10}{2}$<br>$y_m = 5$<br>$\therefore P_m(3,5)$ |

Basado en competencias



Calcular las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{QR}$ si $Q(8,-5)$ y $R(-4,7)$.

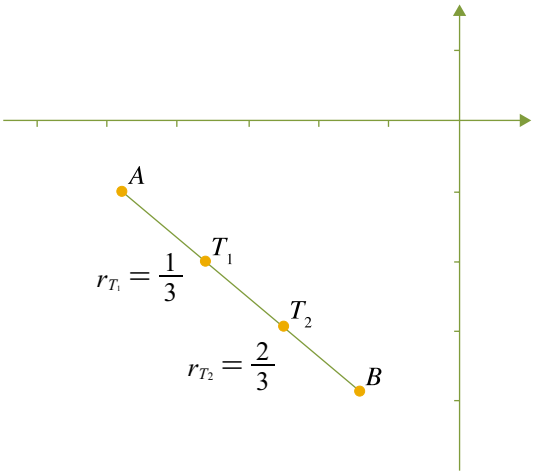
Ejercicio
Módulo 1

## 1.4 Puntos de Trisección

### Situación-Problema

El punto de salida de una carrera se ubica en el origen de coordenadas $(0,0)$ y la meta en el punto $(21,6)$. Si la trayectoria de la carrera es un segmento de recta y se quieren colocar dos puestos de auxilio, de tal forma que el primero esté a la misma distancia del inicio de la carrera como del segundo puesto y el segundo puesto de auxilio esté a la misma distancia del primer puesto como de la meta, ¿cuáles deben ser las coordenadas de los puntos en los que debemos colocar estos dos puestos de auxilio?

Al dividir un segmento en tres partes iguales, se obtendrán dos puntos de división, que denominaremos **puntos de trisección** $T_1$ y $T_2$, como se observa en la siguiente figura:



En este caso, los valores de la razones para obtener $T_1$ y $T_2$ serán respectivamente $r_{T_1} = \frac{1}{3}$ (que indica que el segmento $\overline{AT_1}$ es la tercera parte del segmento $\overline{AB}$, o bien que contiene tres veces al segmento $\overline{ATP_1}$) y $r_{T_2} = \frac{2}{3}$, por lo que las expresiones para calcularlos se obtendrán al sustituir estas razones en las expresiones (1) y (2):

$$x = x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1) \qquad y = y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1)$$

$$x = x_1 + \frac{x_2}{3} - \frac{x_1}{3} \qquad y = y_1 + \frac{y_2}{3} - \frac{y_1}{3}$$

$$x = \frac{2x_1}{3} + \frac{x_2}{3} \qquad y = \frac{2y_1}{3} + \frac{y_2}{3}$$

$$x_{T_1} = \frac{2x_1 + x_2}{3} \qquad y_{T_1} = \frac{2y_1 + y_2}{3}$$

$$x = x_1 + \frac{2}{3}(x_2 - x_1) \qquad y = y_1 + \frac{2}{3}(y_2 - y_1)$$

$$x = x_1 + \frac{2x_2}{3} - \frac{2x_1}{3} \qquad y = y_1 + \frac{2y_2}{3} - \frac{2y_1}{3}$$

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{2x_2}{3} \qquad y = \frac{y_1}{3} + \frac{2y_2}{3}$$

$$x_{T_2} = \frac{x_1 + 2x_2}{3} \qquad y_{T_2} = \frac{y_1 + 2y_2}{3}$$

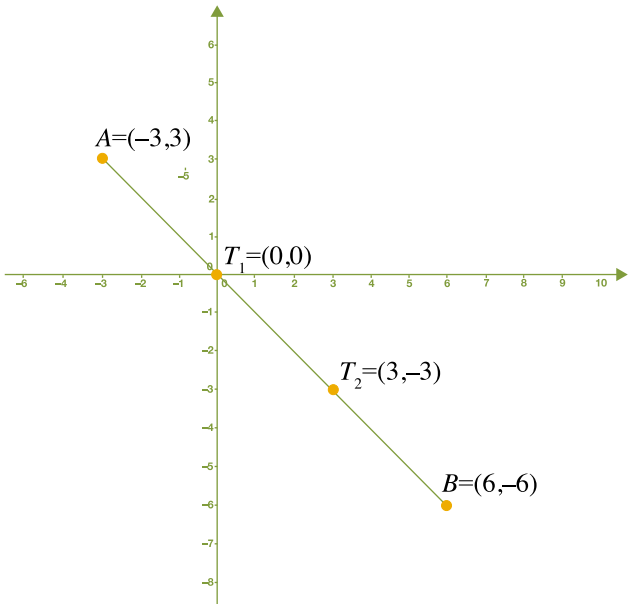
Basado en competencias

Ejemplo

Los extremos de un segmento son los puntos $A(-3,3)$ y $B(6,-6)$. Determinar las coordenadas de los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales.

**Solución**

| Datos: | Fórmulas: | Sustitución: |
|---|---|---|
| $A(-3,3) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 3 \end{cases}$<br>$B(6,-6) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = -6 \end{cases}$ | $x_{T_1} = \frac{2x_1 + x_2}{3}$<br>$y_{T_1} = \frac{2y_1 + y_2}{3}$<br>$x_{T_2} = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$<br>$y_{T_2} = \frac{y_1 + 2y_2}{3}$ | $x_{T_1} = \frac{2(-3)+6}{3} = 0$<br>$y_{T_1} = \frac{2(3)+(-6)}{3} = 0$<br>$x_{T_2} = \frac{-3+2(6)}{3} = 3$<br>$y_{T_2} = \frac{3+2(-6)}{3} = -3$<br>$\therefore T_1(0,0)$ y $T_2(3,-3)$ |

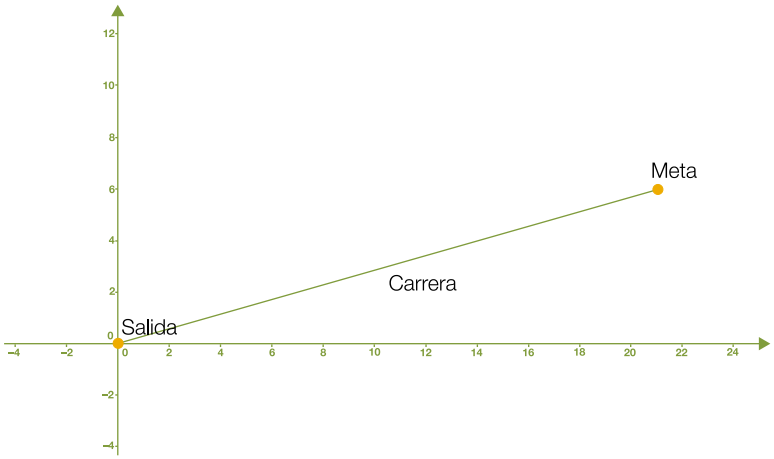



Los extremos de un segmento son los puntos $A(-4,-6)$ y $B(8,0)$. Determinar las coordenadas de los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales.

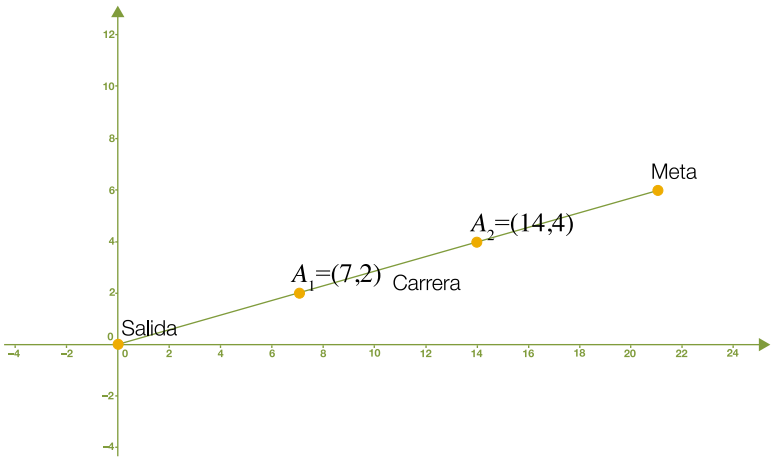
Ejercicio
Módulo 1

Regresando a la situación-problema, obsérvese del enunciado que los puntos en los que deben estar los puestos de auxilio son aquellos que dividen la distancia de la carrera en tres partes iguales, que equivale a obtener los puntos de trisección.

Así, entonces, se tiene que:

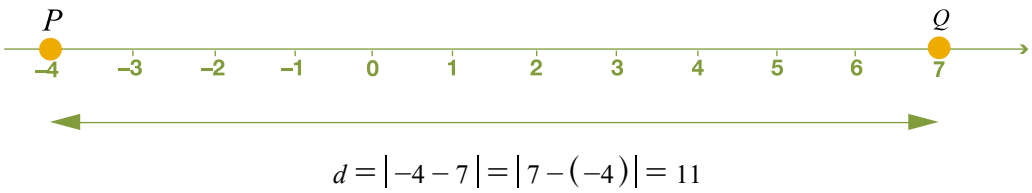



| Datos: | Fórmulas: | Sustitución: |
|---|---|---|
| $A(0,0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$<br>$B(21,6) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 21 \\ y_2 = 6 \end{cases}$ | $x_{T_1} = \frac{2x_1 + x_2}{3}$<br>$y_{T_1} = \frac{2y_1 + y_2}{3}$<br>$x_{T_2} = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$<br>$y_{T_2} = \frac{y_1 + 2y_2}{3}$ | $x_{T_1} = \frac{2(0)+21}{3} = 7$<br>$y_{T_1} = \frac{2(0)+(6)}{3} = 2$<br>$x_{T_2} = \frac{0+2(21)}{3} = 14$<br>$y_{T_2} = \frac{0+2(6)}{3} = 4$<br>Por tanto, las coordenadas de los puestos de auxilio serán:<br>$\therefore A_1(7,2)$ y $A_2(14,4)$ |



# 2. Distancia entre dos puntos

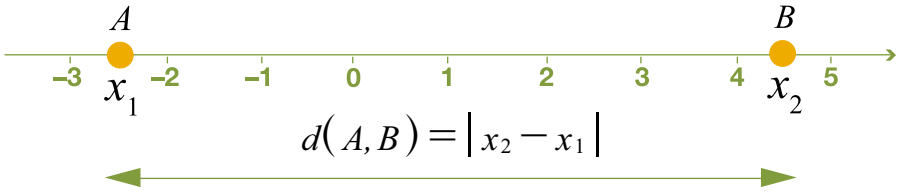
Cuando se tienen dos puntos en un eje numérico, la longitud del segmento que los une, es decir la distancia $d$ entre ellos, es simplemente el valor absoluto de la diferencia de sus valores. Por ejemplo, si se tienen los puntos $P$ y $Q$, localizados en –4 y 7 respectivamente, en un eje numérico horizontal, la distancia entre ellos es 11 unidades, resultado que puede obtenerse realizando la operación $|7-(-4)|=|-4-7|=11$.




$$d=|-4-7|=|7-(-4)|=11$$

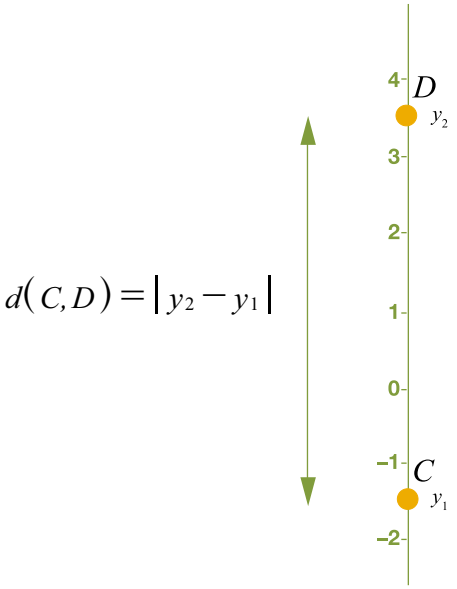
Así, entonces, si la recta numérica es horizontal, es posible determinar la distancia entre dos puntos $A$ y $B$ (denotada por $d(A,B)$), localizados en $x_1$ y $x_2$ respectivamente, mediante la fórmula:

$$d(A,B)=|x_2-x_1|$$

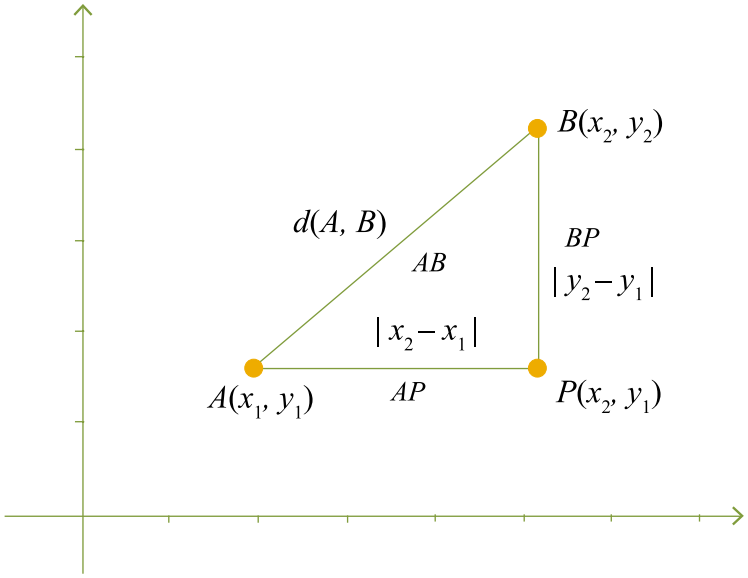



De manera análoga, si dos puntos $C$ y $D$ están localizados en $y_1$ y $y_2$ respectivamente sobre un eje numérico vertical, la distancia entre ellos se calcula con la expresión:

$$d(C,D)=|y_2-y_1|$$



Uno de los problemas básicos de Geometría Analítica consiste en determinar la distancia que hay entre dos puntos, cuando éstos se representan mediante coordenadas rectangulares. Considérese, entonces, los puntos $A$ y $B$ como se muestra en la siguiente figura, los cuales determinan el segmento $\overline{AB}$. Realícese el trazo del segmento de recta $\overline{AP}$, que pasa por $A$ y es paralelo al eje $X$, y el segmento de recta $\overline{BP}$, que pasa por $B$ y es paralelo al eje $Y$. Tales segmentos se intersectan en el punto $P$, cuyas coordenadas son $(x_2, y_1)$, como se ve en la figura:




Como el triángulo $APB$ es rectángulo, por el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$d(A,B)^2 = d(A,P)^2 + d(B,P)^2$$

O bien:

$$d(A,B)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Así entonces:

La distancia $d$ entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se calcula con la fórmula:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

O también, como todo número elevado al cuadrado es positivo:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejemplo

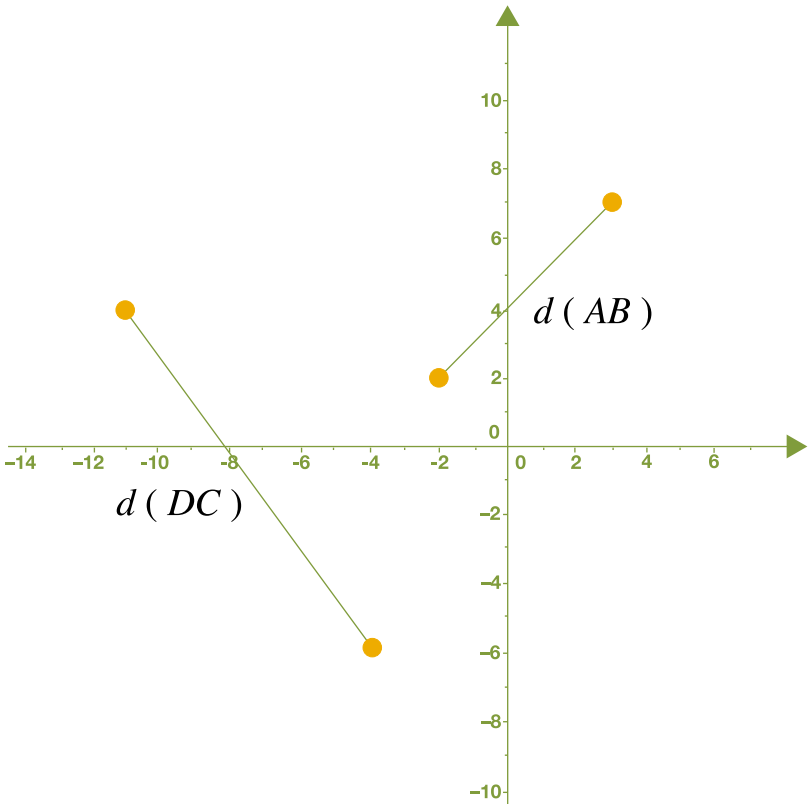
Dados los siguientes puntos:

$$A(3,7), B(-2,2), C(-4,-6), D(-11,4)$$

Trazar los segmentos $AB$ y $CD$ y calcular las distancias entre $A$ y $B$ y entre $C$ y $D$.

### Solución

| Datos: | Fórmulas: | Sustitución: |
|---|---|---|
| $d(A,B)$<br>$A(3,7) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 7 \end{cases}$<br>$B(-2,2) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases}$<br>$d(C,D)$<br>$A(-4,-6) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = -6 \end{cases}$<br>$B(-11,4) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -11 \\ y_2 = 4 \end{cases}$ | $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ | $d(A,B) = \sqrt{(-2-3)^2 + (2-7)^2}$<br>$d(A,B) = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2}$<br>$d(A,B) = \sqrt{25+25}$<br>$d(A,B) = \sqrt{50}$<br><br>$d(C,D) = \sqrt{(-11-(-4))^2 + (4-(-6))^2}$<br>$d(C,D) = \sqrt{(-7)^2 + (10)^2}$<br>$d(C,D) = \sqrt{49+100}$<br>$d(C,D) = \sqrt{149}$ |



**Ejercicio**
Módulo 1

Dados los puntos: $A(2,5), B(-1,4), C(-6,-9), D(-10,7)$

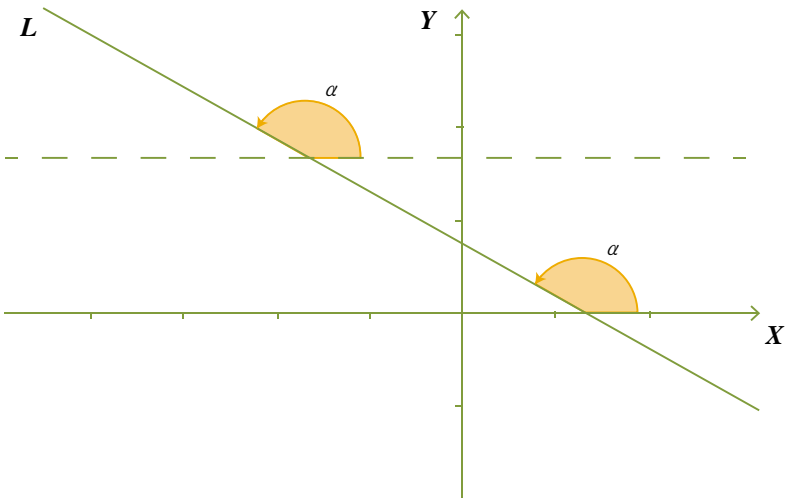
Trazar los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y calcular las distancias entre $A$ y $B$ y entre $C$ y $D$.

Basado en competencias

# 3. Pendiente de una recta

## 3.1 Ángulo de inclinación de una recta

El *ángulo de inclinación* $\alpha$ de una recta $L$ se define como el formado entre el eje $x$ (o una línea horizontal) y dicha recta. Éste toma valores entre $0°$ y $180°$. El ángulo se traza en sentido positivo (en contra del movimiento de las manecillas del reloj) a partir del eje $x$ (o de la horizontal).



Ejemplos de ángulos de inclinación de distintas rectas:

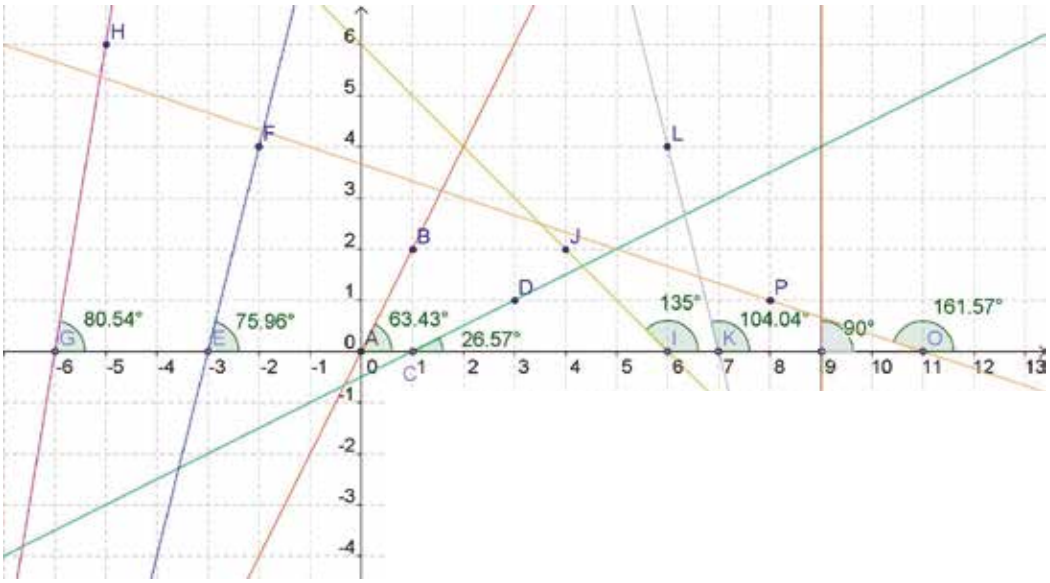



Image 2. Ángulos de inclinación de distintas rectas

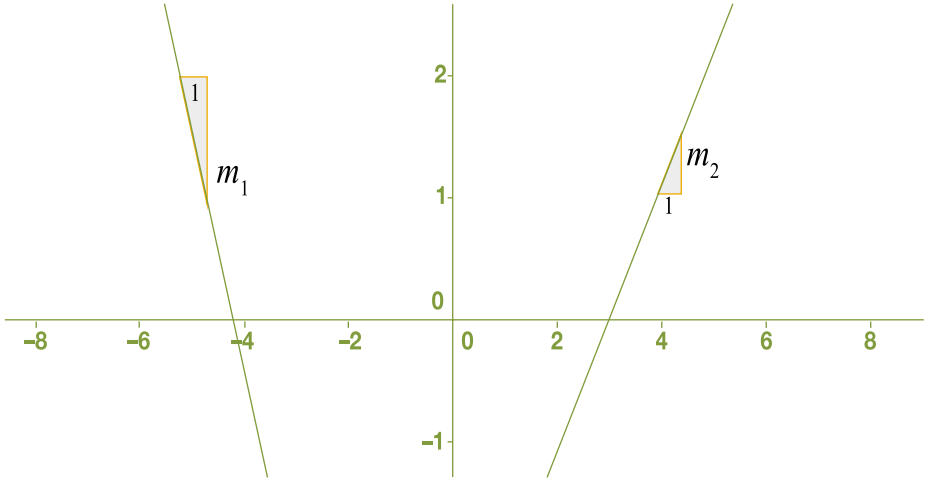
Si la recta es paralela al eje $x$, el ángulo de inclinación vale cero.

Ahora bien, se define la pendiente o coeficiente angular de una recta como la **tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación** y se representa con la letra $m$.

Simbólicamente:

$$m = \tan \alpha$$

La pendiente, en general, puede definirse como aquella magnitud que expresa la variación (crecimiento o decrecimiento) de un objeto con respecto a sí mismo; por ejemplo, en el caso de una recta, indica el crecimiento o decrecimiento de la misma al avanzar una unidad; es decir, si la pendiente de una recta es $m$, indica que, cuando avanza horizontalmente una unidad a la derecha, la recta sube (o baja si la pendiente es negativa) $m$. unidades verticalmente. Geométricamente, lo anterior se puede representar con un triángulo rectángulo cuyo cateto horizontal valga una unidad, su cateto vertical valga $m$. unidades y su hipotenusa esté sobre la recta.



Ejemplos de pendientes de distintas rectas

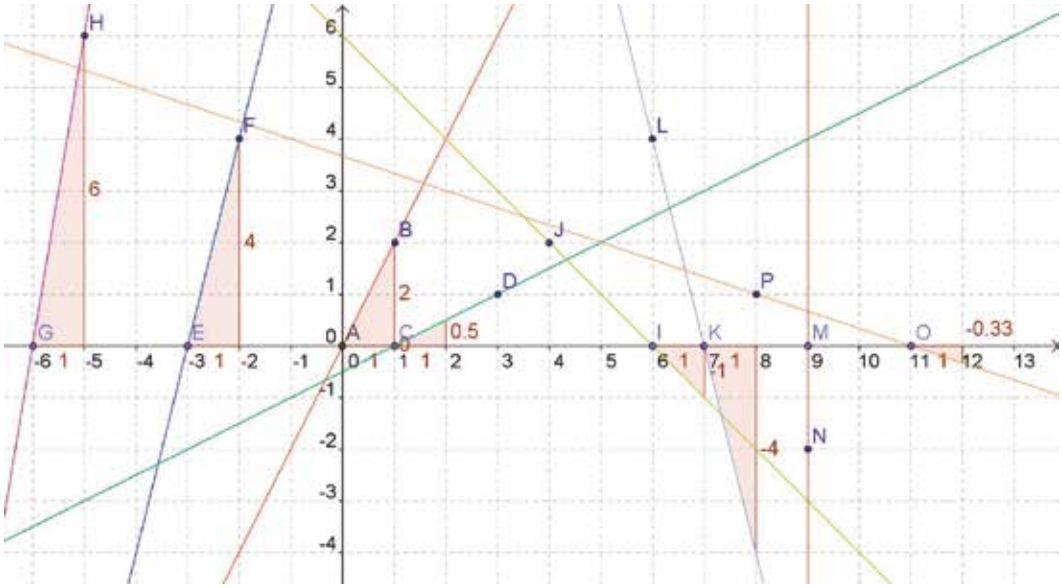
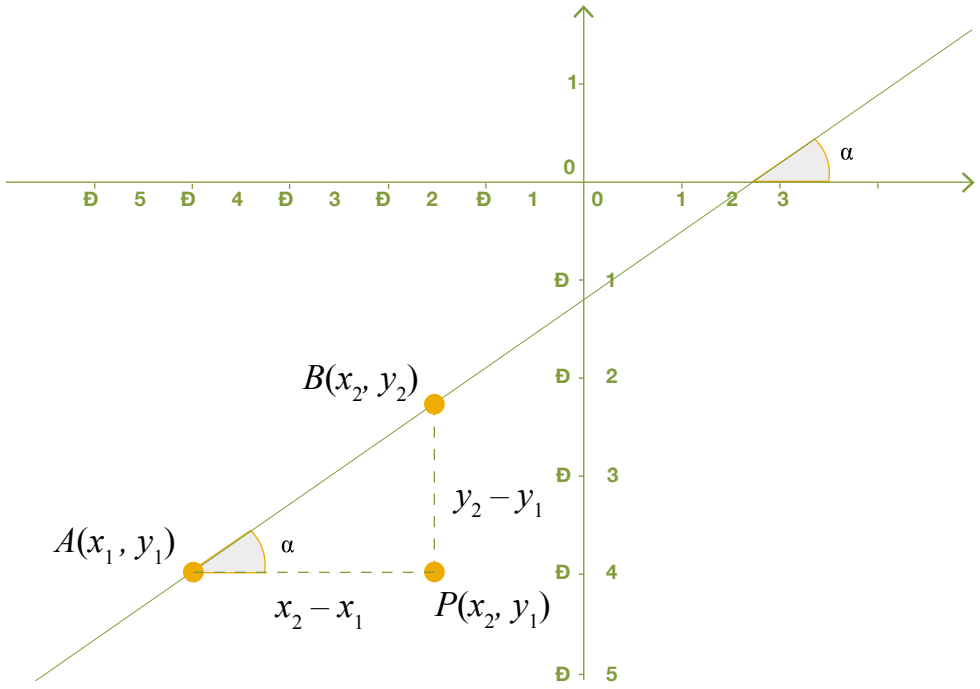



Image 3. Pendientes de distintas rectas

Una recta inclinada a la derecha posee pendiente positiva (que indica que el valor de $\alpha$ está entre $0°$ y $90°$); una inclinada a la izquierda posee pendiente negativa ($\alpha$ está entre $90°$ y $180°$) y una vertical se considera que posee pendiente infinita ($\alpha = 90°$).

Ahora bien, ¿cómo puede determinarse analíticamente la pendiente de una recta o de un segmento de recta? Considérese la siguiente figura, en la que se tienen dos puntos $A$ y $B$ sobre una recta y de los cuales se conocen sus coordenadas.



Trazamos los segmentos auxiliares $\overline{AP}$ (paralelo al eje $X$) y $\overline{BP}$ (paralelo al eje $Y$) de tal manera que el triángulo $ABP$ es rectángulo y determinamos la tangente de $\alpha$.

$$tan\alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}$$

$$tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y como $m = tan\,\alpha$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ésta es la fórmula para obtener la pendiente de una recta o segmento de recta, cuando se conocen las coordenadas de dos de sus puntos.

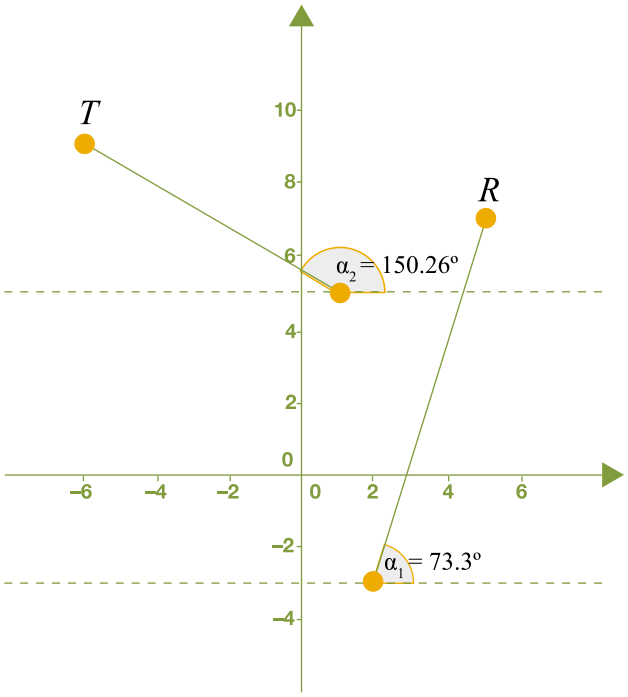
Dados los siguientes puntos:

$$Q\,(2,-3), R\,(5,7), S\,(1,5)\; T\,(-6,9)$$

Calcular la pendiente de los segmentos $\overline{QR}$ y $\overline{ST}$ así como su ángulo de inclinación.

**Solución**

| Datos: | Fórmulas: | Sustitución: |
|---|---|---|
| $m_{QR}$<br>$Q(2,-3) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -3 \end{cases}$<br>$R(5,7) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 7 \end{cases}$<br>$m_{QR}$<br>$S(1,5) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 5 \end{cases}$<br>$T(-6,9) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -6 \\ y_2 = 9 \end{cases}$ | $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$<br>$tan\,(\alpha) = m$ | $m_{QR} = \frac{7-(-3)}{5-2}$<br>$m_{QR} = \frac{10}{3}$<br>Ángulo de inclinación:<br>$tan\,\alpha = \frac{10}{3}$<br>$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{10}{3}\right)$<br>$\alpha = 73.3007^\circ = 73^\circ 18' 2.72''$ |




$$m_{ST} = \frac{9-5}{-6-1}$$

$$m_{ST} = -\frac{4}{7}$$

Ángulo de inclinación:

$$tan\,(\alpha) = -\frac{4}{7}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{7}\right)$$

$$\alpha_R = -29.7448^\circ = -29^\circ 44' 41.57''$$

Cuando la pendiente es negativa, el ángulo obtenido es el reducido y el de inclinación es obtuso; se obtiene restando a 180° el valor absoluto del reducido.

$$\alpha = 180^\circ - 29.7448^\circ$$

$$\alpha = 150.2551^\circ = 150^\circ 15' 18.43''$$

Basado en competencias

**Ejercicio**
Módulo 1

Dados los siguientes puntos:

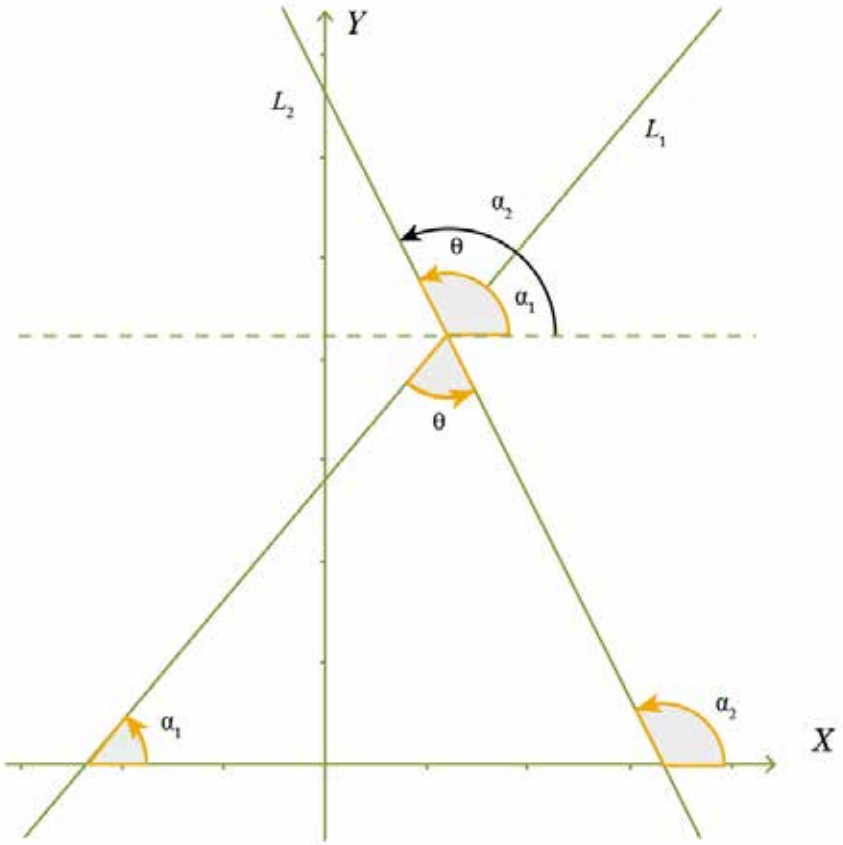
$$A(3,-4), B(7,5), C(-2,8), D(1,0)$$

Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

## 3.2 Ángulo entre dos rectas

Otro de los problemas fundamentales de la Geometría Analítica es determinar la medida del ángulo formado por dos rectas. Se deduce a continuación la fórmula para calcularlo cuando se conoce el valor de las pendientes de las rectas.

Sean $L_1$ y $L_2$ dos rectas que se cortan en un punto y por el cual se traza una línea auxiliar horizontal, como se muestra en la siguiente figura, y $\alpha_1$ y $\alpha_2$ sus ángulos de inclinación respectivamente. Se denomina a $\alpha$ como el ángulo entre ellas.




Se traza una recta auxiliar horizontal que pase por el punto de intersección y se forman los ángulos correspondientes $\alpha_1$ y $\alpha_2$.

De la figura se observa que:

$$\alpha_2 = \theta + \alpha_1$$

De donde:

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Aplicando tangente en ambos lados de la igualdad:

$$tan\theta = tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Aplicando la identidad:

$$tan(A-B)=\frac{tanA-tanB}{1+tanAtanB}$$

Se obtiene:

$$tan\theta=\frac{tan\alpha_2-tan\alpha_1}{1+tan\alpha_2 tan\alpha_1}$$

Pero, de la definición de pendiente:

$$tan\alpha_1=m_1 \text{ y } tan\alpha_2=m_2$$

Por tanto:

$$tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

O bien:

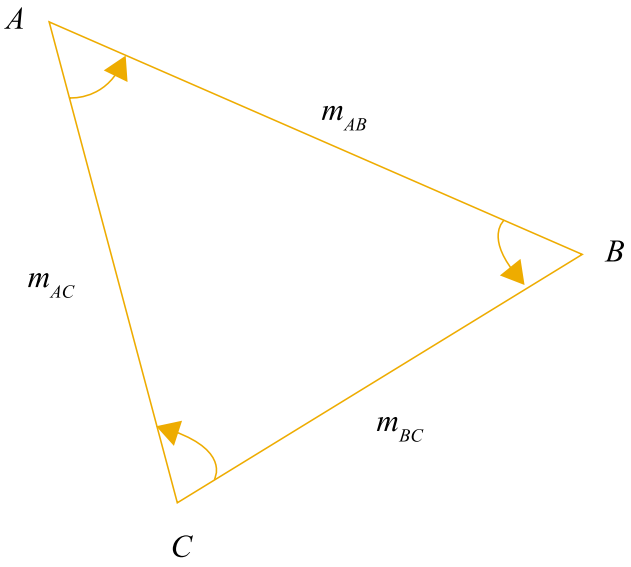
$$\theta=\tan^{-1}\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

Basado en competencias

Para facilitar la aplicación de la fórmula anterior, se sugiere lo siguiente:

- Calcular las pendientes de las rectas
- El sentido del ángulo siempre debe ser *positivo* (en contra del movimiento de las manecillas del reloj), por lo que la *pendiente inicial* ($m_1$) será la de la recta de donde se empiece a trazar el ángulo y la *pendiente final* ($m_2$) será la de la recta a donde llegue el trazo del ángulo.

Por ejemplo, consideremos el siguiente triángulo $ABC$ en el que se han trazado, en sentido positivo, sus ángulos interiores. De acuerdo a la explicación anterior, se muestra para cada ángulo cuál sería la pendiente inicial y cuál la final.



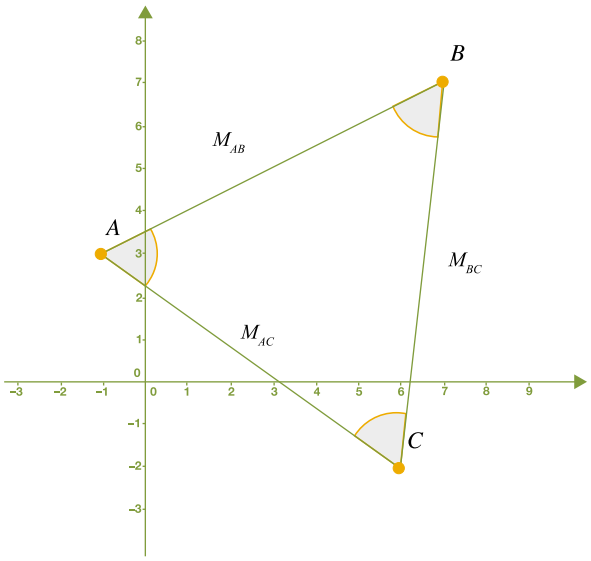

| Ángulo | Pendientes |
|---|---|
| $A$ | $m_1=m_{AC}$ |
| | $m_2=m_{AB}$ |
| $B$ | $m_1=m_{AB}$ |
| | $m_2=m_{BC}$ |
| $C$ | $m_1=m_{BC}$ |
| | $m_2=m_{AC}$ |

Ejemplo

Calcular los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos:

$$A(-1,3),\ B(7,7)\ \text{y}\ C(6,-2)$$

## Solución




| Datos | Fórmulas |
|---|---|
| $A(-1,3)$<br>$B(7,7)$<br>$C(6,-2)$ | $tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$<br>$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ |

| Pendiente de $AB$ | Pendiente de $AC$ | Pendiente de $BC$ |
|---|---|---|
| $m_{AB} = \frac{7-3}{7-(-1)}$<br>$m_{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ | $m_{AC} = \frac{3-(-2)}{-1-6}$<br>$m_{AC} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$ | $m_{BC} = \frac{-2-7}{6-7}$<br>$m_{BC} = \frac{-9}{-1} = 9$ |
| Ángulo Interno $A$<br>$tanA = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{7}\right)}{1 + \left(-\frac{5}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$<br>$tanA = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{14}}$<br>$tanA = \frac{17}{9}$<br>$\Rightarrow$<br>$A = \tan^{-1}\left(\frac{17}{9}\right)$<br>$A = 62.1027^\circ$<br>$A = 62^\circ 6' 9.82''$ | Ángulo Interno $B$<br>$tanB = \frac{9 - \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)(9)}$<br>$tanB = \frac{\frac{18-1}{2}}{\frac{2+9}{2}}$<br>$tanB = \frac{17}{11}$<br>$\Rightarrow$<br>$B = \tan^{-1}\left(\frac{17}{11}\right)$<br>$B = 57.0947^\circ$<br>$B = 57^\circ 5' 41.13''$ | Ángulo Interno $C$<br>$tanC = \frac{-\frac{5}{7} - 9}{1 + 9\left(-\frac{5}{7}\right)}$<br>$tanC = \frac{\frac{-5-63}{7}}{\frac{7-45}{7}}$<br>$tanC = \frac{34}{19}$<br>$\Rightarrow$<br>$C = \tan^{-1}\left(\frac{34}{19}\right)$<br>$C = 60.8025^\circ$<br>$C = 60^\circ 48' 9.05''$ |
| **Comprobación** | | |

$$A + B + C = 62.1027^\circ + 57.0947^\circ + 60.8025^\circ = 180^\circ$$

Ejercicio
Módulo 1

Calcular los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos:

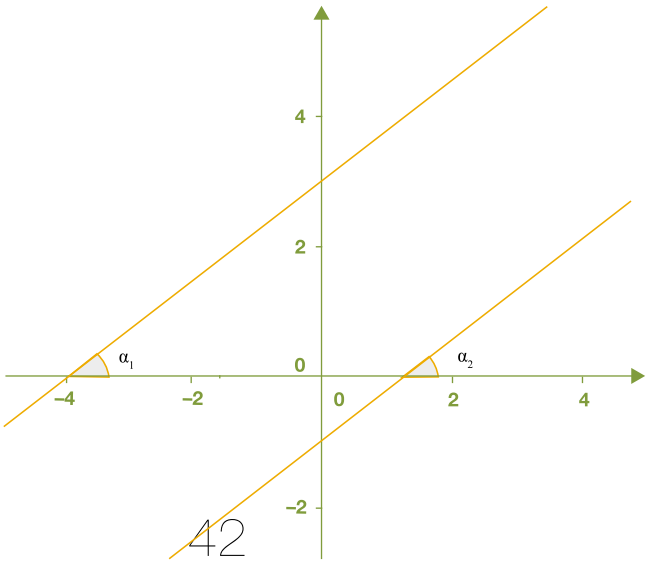
$$A(-8,-3), B(2,7) \text{ y } C(7,-3)$$

Basado en competencias

## 3.3 Rectas paralelas y perpendiculares

En ocasiones, al resolver problemas de la Geometría Analítica, se requiere saber si dos rectas son paralelas o perpendiculares entre sí. Las rectas paralelas son aquellas que están situadas en un mismo plano, no se cortan por más que se prolonguen, sus inclinaciones son iguales y, por consiguiente, sus pendientes también serán iguales; es decir, si $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son los ángulos de inclinación de dos rectas y $\alpha_1 = \alpha_2$, entonces $tan\alpha_1 = tan\alpha_2$, o bien:

$$m_1 = m_2$$



Analíticamente, lo anterior se puede comprobar con la fórmula para calcular el ángulo entre dos rectas cuando el numerador vale cero:

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$tan\theta = \frac{0}{1 + m_1 m_2}$$

$$tan\theta = 0$$

$$\theta = tan^{-1} 0 = 0^\circ$$

Esto implica que las rectas no se cortan, por tanto, son paralelas; para que se cumpla lo anterior:

$$m_2 - m_1 = 0$$

O bien:

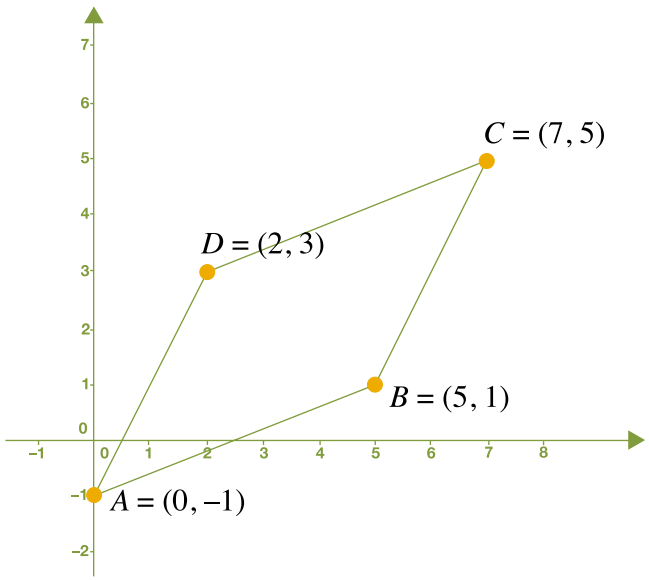
$$m_1 = m_2$$

Esta sería la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas (condición de paralelismo) y sus pendientes sean iguales.

Ejemplo

Comprobar, basándose en la condición de paralelismo, que el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(0,-1), B(5,1), C(7,5)$ y $D(2,3)$, es un paralelogramo.

**Solución**




Por la condición de paralelismo, se debe cumplir con que:

$$m_{AD} = m_{BC}$$

$$m_{AB} = m_{DC}$$

| Datos | Fórmula | Sustitución | |
|---|---|---|---|
| $A(0,-1)$<br>$B(5,1)$<br>$C(7,5)$<br>$D(2,3)$ | $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ | Segmento $AB$<br>$A(0,-1)\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\y_1=-1\end{cases}$<br>$B(5,1)\Rightarrow\begin{cases}x_2=5\\y_2=1\end{cases}$<br>$m_{AB}=\frac{1-(-1)}{5-0}$<br>$m_{AB}=\frac{2}{5}$ | Segmento $DC$<br>$D(2,3)\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\y_1=3\end{cases}$<br>$C(7,5)\Rightarrow\begin{cases}x_2=7\\y_2=5\end{cases}$<br>$m_{BC}=\frac{5-3}{7-2}$<br>$m_{BC}=\frac{2}{5}$ |
| Como<br>$m_{AB}=m_{DC}$<br>$m_{AD}=m_{BC}$<br>$AB$ es paralelo a $DC$ y $AD$ es paralelo a $BC$.<br>Por lo que se comprueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. | | Segmento $AD$<br>$A(0,-1)\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\y_1=-1\end{cases}$<br>$D(2,3)\Rightarrow\begin{cases}x_2=2\\y_2=3\end{cases}$<br>$m_{AD}=\frac{3-(-1)}{2-0}$<br>$m_{AD}=\frac{4}{2}=2$ | Segmento $BC$<br>$B(5,1)\Rightarrow\begin{cases}x_1=5\\y_1=1\end{cases}$<br>$C(7,5)\Rightarrow\begin{cases}x_2=7\\y_2=5\end{cases}$<br>$m_{BC}=\frac{5-1}{7-5}$<br>$m_{BC}=\frac{4}{2}=2$ |

Basado en competencias

Ejercicio
Módulo 1

Comprobar, basándose en la condición de paralelismo, que el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(-3,-2), B(4,1), C(5,7)$ y $D(-2,4)$ es un paralelogramo.

## 3.4 Rectas perpendiculares

Las rectas perpendiculares son aquellas que se cortan y el ángulo que forman es recto (son, de hecho, cuatro ángulos rectos).

De la fórmula de ángulo entre dos rectas:

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Si:

$$1 + m_1 m_2 = 0$$

Entonces:

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{0}\left( indefinido \right)$$

Y cuando la $tan\theta$ es indefinida, se está en el caso en que $\theta = 90^\circ$; es decir, que las dos rectas son perpendiculares entre sí.

Así pues, la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares (condición de perpendicularidad) es que:

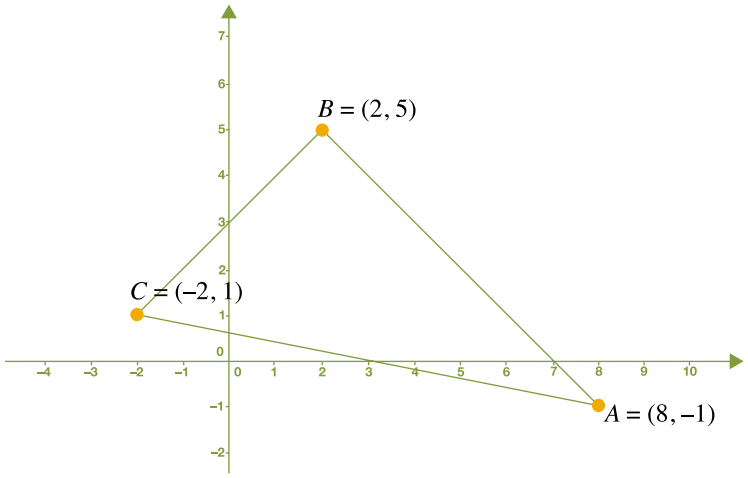
$$m_1 m_2 = -1$$

Es decir, que el producto de sus pendientes sea $-1$ (esto implica que las pendientes sean recíprocas y de signo contrario).

Ejemplo

Utilizando la condición de perpendicularidad, comprobar que los puntos $A(8, -1)$, $B(2,5)$ y $C(-2,1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

**Solución**




Para que el triángulo sea rectángulo, el ángulo interior del vértice $B$ debe ser recto y debe cumplirse la condición de perpendicularidad entre los segmentos $AB$ y $BC$, es decir:

$$m_{AB} m_{BC} = -1$$

| Datos | Fórmula | Sustitución | |
|---|---|---|---|
| $A(8,-1)$<br>$B(2,5)$<br>$C(-2,1)$ | $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ | Segmento $AB$<br>$A(8,-1)\Rightarrow\begin{cases}x_1=8\\y_1=-1\end{cases}$<br>$B(2,5)\Rightarrow\begin{cases}x_2=2\\y_2=5\end{cases}$<br>$m_{AB}=\frac{5-(-1)}{2-8}=\frac{6}{-6}$<br>$m_{AB}=-1$ | Segmento $BC$<br>$B(2,5)\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\y_1=5\end{cases}$<br>$C(-2,1)\Rightarrow\begin{cases}x_2=-2\\y_2=1\end{cases}$<br>$m_{AB}=\frac{1-5}{-2-2}=\frac{-4}{-4}$<br>$m_{AB}=1$ |
| Como<br>$m_{AB}m_{BC}=(-1)(1)=-1$<br>Se cumple la condición de perpendicularidad entre los segmentos $AB$ y $BC$ y el ángulo $B$ es recto, por lo que se comprueba que el triángulo $ABC$ es rectángulo. | | | |

Basado en competencias

Ejercicio
Módulo 1

Utilizando la condición de perpendicularidad, comprobar que los puntos $A(-1,1),B(2,4)$ y $C(6,0)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

# 4. Ecuación de la recta en sus diferentes formas

La ecuación de la recta se obtiene de acuerdo a las características que se conozcan de ella, mismas que determinan su nombre y que, a continuación, se presentan.

## 4.1 Ecuación Punto-Pendiente

La ecuación "punto - pendiente" se obtiene cuando un punto $P_1(x_1, y_1)$ de la recta y la pendiente *m.* de la misma están determinados; está dada por: $y - y_1 = m(x - x_1)$

En ocasiones el valor de se da indirectamente a través del ángulo de inclinación $\beta$: $m = tan\,\beta$
Obtención de la ecuación punto pendiente:

Sea el punto $P_1(x_1, y_1)$ es un punto conocido y $P(x, y)$ es otro cualquiera de la recta, como se observa en la Figura.

La pendiente entre ellos es:

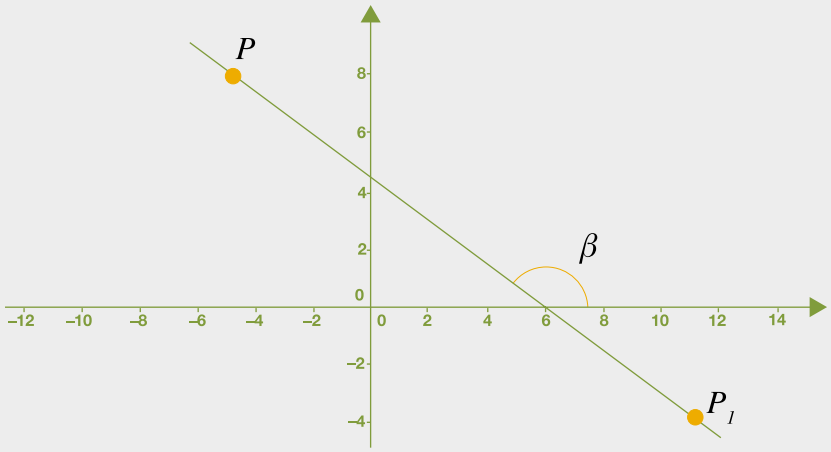
$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Despejando $y - y_1$:

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

Se obtiene la ecuación punto-pendiente de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



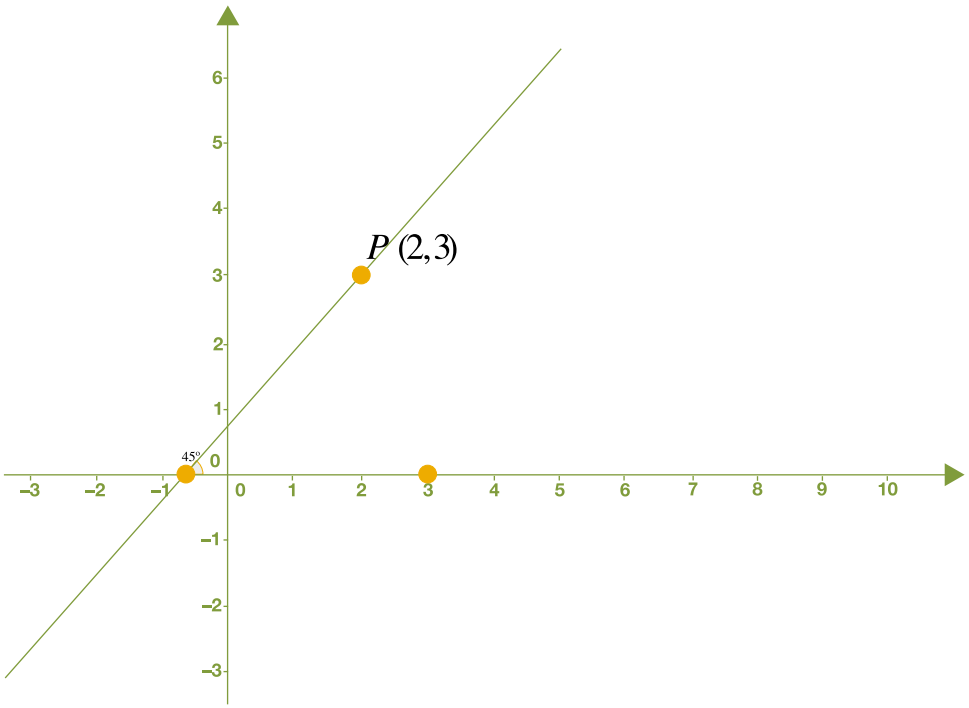

Obtener la ecuación y trazar la gráfica de la recta que pasa por el punto $P(2,3)$ con un ángulo de inclinación de $\alpha = 45°$.

Ejemplo

**Solución**

| Datos | Fórmulas | Sustitución |
|---|---|---|
| $P_1(2,3) \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases}$<br>$\alpha = 45°$.<br>$P(x, y)$ | $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ ... (1)<br>$m = tan\,(\alpha)$ ... (2) | Sustituyendo los datos en *2*:<br>$m = tan 45°$<br>$m = 1$<br>Sustituyendo datos en *1*:<br>$y - 3 = 1(x - 2)$<br>$y - 3 = x - 2$<br>La ecuación de la recta es:<br>$x - y + 1 = 0$ |

Gráfica:




Basado en competencias

Ejercicio
Módulo 1

Obtener la ecuación y trazar la gráfica de la recta que pasa por el punto $P(-1,3)$ y tiene un ángulo de inclinación de $\alpha = 56^{\circ}18'36''$.

**Respuesta**: Ecuación $3x - 2y + 9 = 0$.

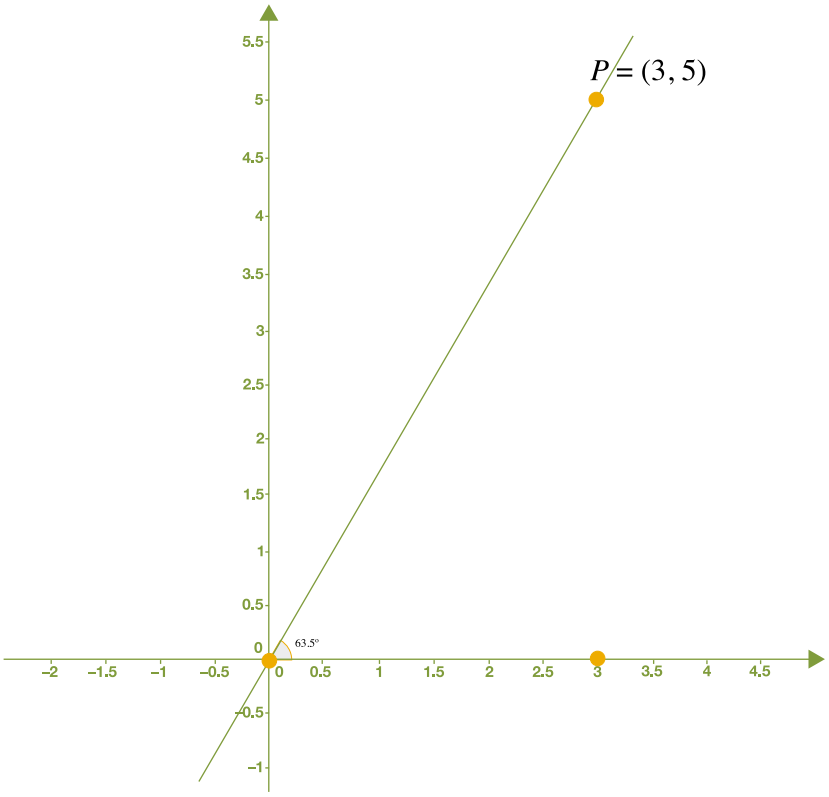
Ejemplo

Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(3,5)$ y tiene como pendiente $m = 2$. Determinar su ángulo de inclinación y trazar su gráfica.

## Solución

| Datos | Fórmulas | Sustitución |
|---|---|---|
| $P_1(3,5) \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 5 \end{cases}$<br><br>$m = 2$<br><br>$P(x,y)$ | $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ ... (1)<br>$m = tan\,(\alpha)$ ... (2) | Sustituyendo datos en *1*:<br>$y - 5 = 2(x - 3)$<br>$y - 5 = 2x - 6$<br>$2x - y - 6 + 5 = 0$<br><br>La ecuación de la recta es<br>$2x - y - 1 = 0$<br>Sustituyendo los datos en *2*:<br>$m = tan\alpha$<br>$\alpha = tan^{-1}(2)$<br><br>El ángulo de inclinación es:<br>$\alpha = 63^{\circ}26'05''$ |

Gráfica:



Ejercicio
Módulo 1

Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q(-3,3)$ y tiene una pendiente de $m=\frac{4}{5}$. Determinar su ángulo de inclinación y trazar su gráfica.

**Respuesta:** Ecuación: $4x-5y-3=0$. Ángulo de inclinación: $\alpha = 141^{\circ}20'24''$

Basado en competencias

## 4.2 Ecuación pendiente-ordenada al origen

Se obtiene cuando se conocen la pendiente y el punto de intersección con el eje $Y$, que es la ordenada al origen.

Obtención de la ecuación pendiente – ordenada al origen.

Sea el punto de intersección con el eje $Y$:

$$B(0,b) \Rightarrow x_1=0, y_1=b$$

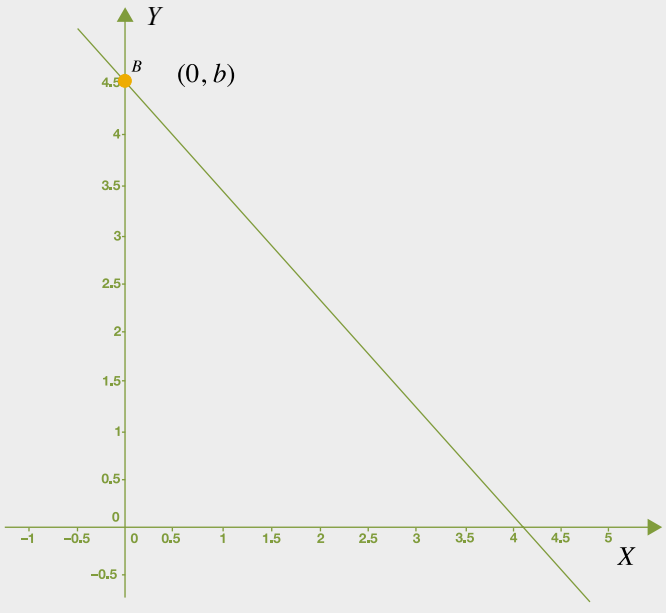
Sustituyendo en la ecuación punto-pendiente se tiene:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-b=m(x-0)$$
$$y-b=mx$$

Despejando se obtiene la ecuación pendiente ordenada al origen:

$$y=mx+b$$

donde:
$m$: es la pendiente de la recta
$b$: es la ordenada al origen



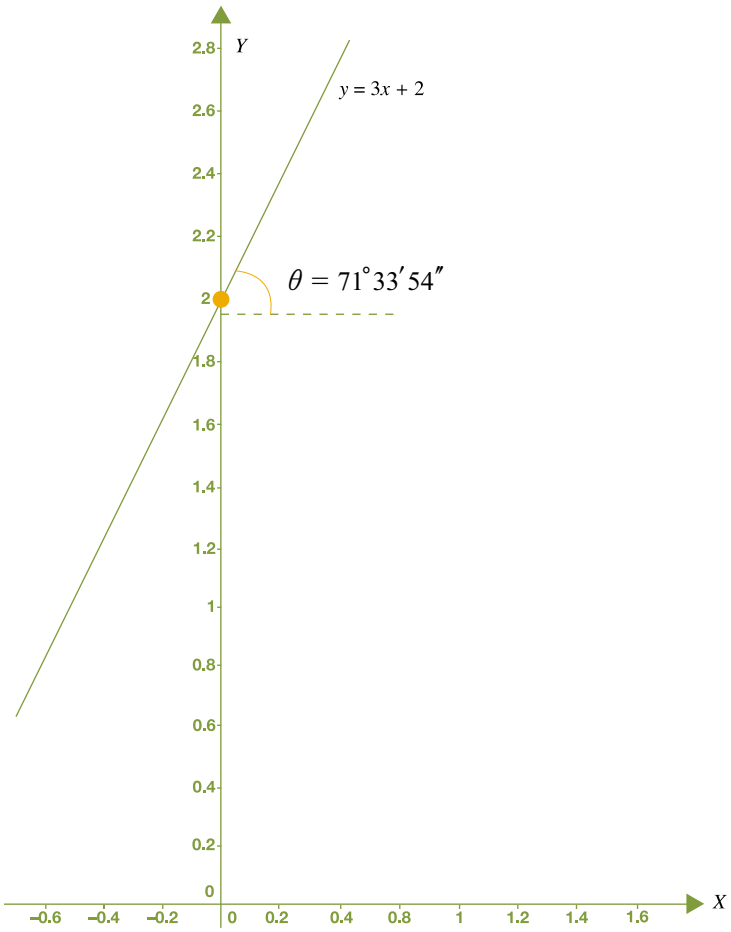
Ejemplo

Calcular la ecuación, el ángulo de inclinación y la gráfica de la recta cuya pendiente es $m = 3$ y su intersección con el eje $Y$ es el punto $A = (0,2)$.

## Solución

| Datos | Fórmulas | Sustitución |
|---|---|---|
| $m = 3$<br><br>$A = (0,2)$ | $y = mx + b \ldots (1)$<br>$m = tan\,(\theta) \ldots (2)$ | Sustituyendo los datos en *1* se obtiene la ecuación pendiente-ordenada al origen:<br>$y = 3x + 2$<br>Sustituyendo datos en *2* tenemos:<br>$3 = tan\theta$<br>$\theta = tan^{-1}(3)$<br>Calculadora:<br>$\theta = 71^{\circ}33'54''$ es el ángulo de inclinación. |

Gráfica



Ejercicio
Módulo 1

Calcular la ecuación, el ángulo de inclinación y la gráfica de la recta cuya pendiente es $m = 2$ y su intersección con el eje $Y$ es el punto $A(0, -1)$.

**Respuesta:** $y = 2x - 1$ $\theta = 63^{\circ}26'06''$

M1 Basado en competencias

## 4.3 Ecuación en forma general de la recta

La forma general de la recta está dada por $Ax + By + C = 0$; donde $A$, $B$ y $C$ son números reales.

### Análisis y características de la ecuación general

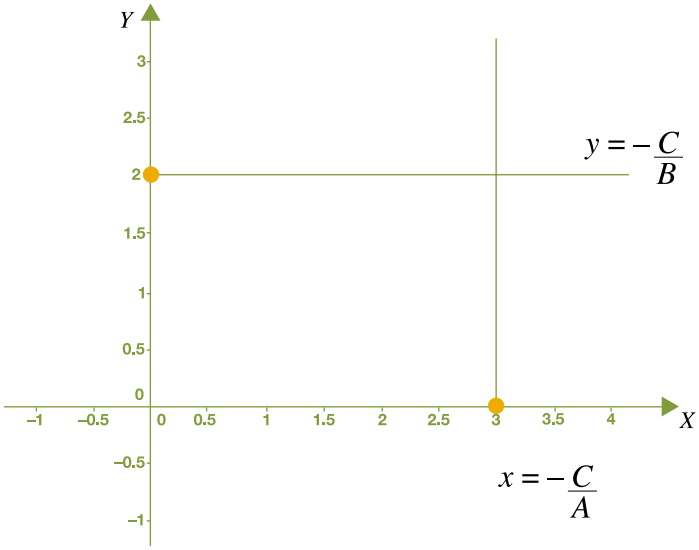
A continuación, se presentan los casos de relación entre los coeficientes y la forma general de la ecuación:

**Caso I:** Si $A = 0, B \neq 0$ y $C \neq 0$
entonces, sustituyendo en la forma general se obtiene:

$$0x + By + C = 0$$

despejando a $y$: $By = -C$ queda: $y = -\frac{C}{B}$

Es la ecuación de una recta paralela al eje $x$.




**Caso II:** Si $A \neq 0, B = 0$ y $C \neq 0$
entonces:

$$Ax + 0y + C = 0$$

despejando a $x$: $Ax = -C$
nos queda: $x = -\frac{C}{A}$

Es la ecuación de una recta paralela al eje $Y$.

**Caso III:** Si $A \neq 0, B = 0$ y $C = 0$

La ecuación se reduce a: $Ax + C = 0$, despejando a $y$: $y = -\frac{A}{B}$ comparándola con la ecuación $y = mx + b$, se observa que es una recta que pasa por el origen y que tiene pendiente $m = -\frac{A}{B}$.

**Caso IV:** Si $A \neq 0, B \neq 0$ y $C \neq 0$

La ecuación es: $Ax + By + C = 0$ despejando a $y$, entonces: $y = -\frac{C}{B}x - \frac{C}{B}$

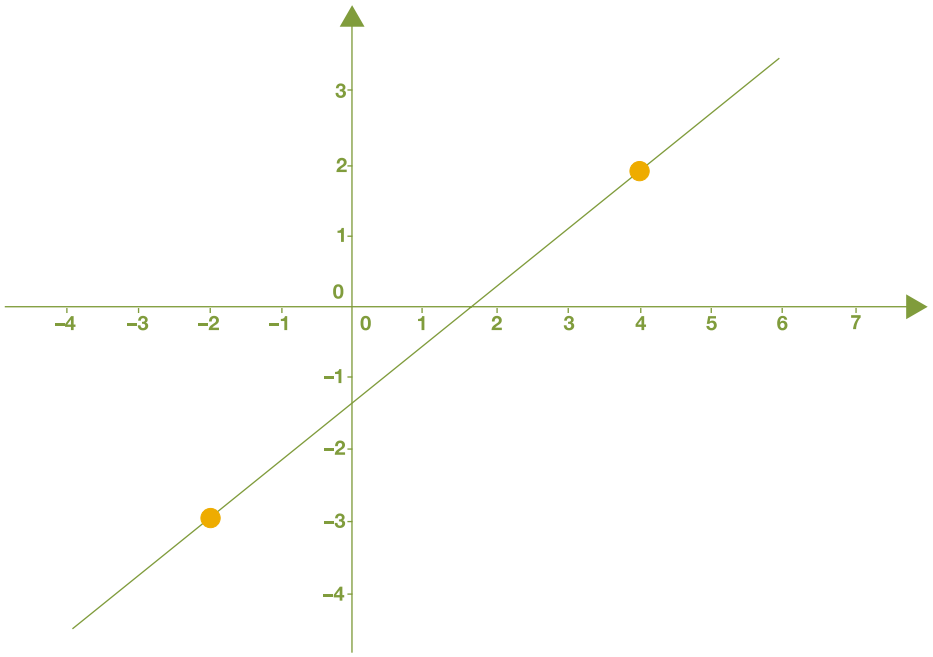
Comparándola con la ecuación con la forma $y = mx + b$, se obtiene que la pendiente de la recta es: $m = -\frac{A}{B}$ y la ordenada al origen es $b = -\frac{C}{B}$.

Observe que la pendiente de la recta, a partir de su forma general, se puede obtener solamente despejando la variable $y$ y, por lo tanto, el valor de dicha pendiente corresponde al coeficiente de la variable $x$; en forma similar, el término independiente obtenido corresponde a la ordenada al origen.

Ejemplo

Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2,-3)$ y $B(4,2)$ en su forma general y trazar su gráfica.

Gráfica:




Basado en competencias

**Solución**

| Datos | Fórmulas | Sustitución |
|---|---|---|
| Con $A(-2,-3)$<br>$x_1 = -2,\ y_1 = -3$<br>Con $B(4,2)$<br>$x_2 = 4,\ y_2 = 2$ | $y - y_1 = m(x - x_1)$ | Sustituyendo datos en la ecuación se obtiene:<br>$y-(-3) = \left[\frac{2-(-3)}{4-(-2)}\right](x(-2))$<br>Entonces:<br>$y+3 = \left[\frac{5}{6}\right](x+2)$<br>Haciendo operaciones se obtiene:<br>$6(y+3) = 5(x+2)$<br>$6y+18 = 5x+10$<br>$-5x+6y+18-10 = 0$<br>Por lo tanto, la ecuación en su forma general de la recta es:<br>$-5x+6y+8 = 0$<br>ó<br>$5x-6y-8 = 0$ |

Ejemplo

Calcular la ecuación de la recta en su forma general si pasa por el punto $A(-4,1)$. Y tiene una pendiente igual a $\frac{3}{2}$, trazar su gráfica.

**Solución**

| Datos | Fórmulas | Sustitución |
|---|---|---|
| Con $A(-4,1)$<br><br>y<br><br>$m=\frac{3}{2}$ | $y-y_1=m(x-x_1)$ | Sustituyendo datos en la ecuación, se obtiene lo siguiente:<br>$y-1=\frac{3}{2}(x-(-4))$<br>Entonces:<br>$y-1=\frac{3}{2}(x+4)$<br>$2(y-1)=3(x+4)$<br>Simplificando se obtiene:<br>$2y-2=3x+12$<br>Entonces:<br>$-3x+2y-2-12=0$<br>Por lo tanto, la ecuación general de la recta es:<br>$-3x+2y-14=0$ |

Ejercicio
Módulo 1

Con los datos anteriores, realizar la gráfica correspondiente.

**Ejercicio**
Módulo 1

Los vértices de un triángulo están en los puntos $A(-3,-5), B(4,-3)$ y $C(7,4)$ Obtener las ecuaciones de sus lados y trazar su gráfica.

Fórmula $y - y_1 = \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right](x_2 - x_1)$

| Para la recta $\overline{AB}$ | Para la recta $\overline{BC}$ | Para la recta $\overline{CA}$ |
|---|---|---|
| $A(-3,-5) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = -3 \\ y_1 = -5 \end{Bmatrix}$ <br> $B(4,-3) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = 7 \\ y_2 = -3 \end{Bmatrix}$ | $B(4,-3) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 4 \\ y_1 = -3 \end{Bmatrix}$ <br> $C(7,4) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = 7 \\ y_2 = 4 \end{Bmatrix}$ | $C(7,4) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 7 \\ y_1 = 4 \end{Bmatrix}$ <br> $A(-3,-5) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = -3 \\ y_2 = -5 \end{Bmatrix}$ |

**Respuesta:** recta $\overline{AB}$ $2x - 7y - 29 = 0$, recta $\overline{BC}$ $7x - 3y - 37 = 0$, recta $\overline{CA}$ $9x - 10y - 23 = 0$

Basado en competencias

**Ejemplo**

Si la ecuación de una recta es $3x - 2y + 6 = 0$, obtener su pendiente y su ordenada al origen.

**Solución**

Despejando la variable se obtiene:

$$-2y = -3x - 6$$

Dividiendo términos por (−2):

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-3x}{-2} - \frac{6}{-2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + 3$$

Donde la pendiente es el coeficiente de la variable y la ordenada al origen es el término independiente:

**Resultado:**

$$m = \frac{3}{2}\ pendiente \wedge b = 3\ ordenada$$

Ejercicio
Módulo 1

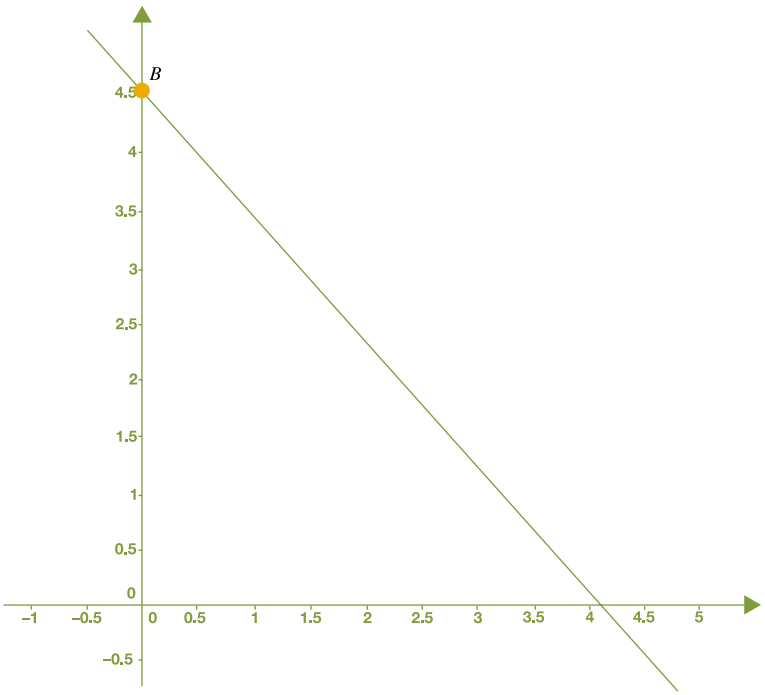
Si la ecuación de una recta es $4x + 3y + 5 = 0$, obtener su pendiente, su ordenada al origen y trazar su gráfica.

**Respuesta:** $m = -\frac{4}{3}$ *pendiente* $\wedge$ $b = -\frac{5}{3}$ *ordenada*

## 4.4 Ecuación de la forma simétrica

Se obtiene cuando se conocen los puntos de intersección de la recta con los ejes $X \wedge Y$: $A(a,0)$ y $B(0,b)$ respectivamente, con $a \wedge b \neq 0$.

Su representación gráfica es:




Obtención de la ecuación en forma simétrica

Si los puntos son: $A(a,0) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = a \\ y_1 = 0 \end{Bmatrix}$ $B(0,b) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = 0 \\ y_2 = b \end{Bmatrix}$

Sustituyendo los puntos en: $y - y_1 = \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right](x_2 - x_1)$

Se obtiene: $y - 0 = \left[\frac{b-0}{0-a}\right](x-a)$

Simplificando: $y = \frac{b}{-a}(x-a)$

$$-ay = bx - ab$$

Dividiendo por $ab$: $bx + ay = ab$

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab}$$

La ecuación de la recta en su forma simétrica es: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ejemplo

Obtener la ecuación de la recta en su forma simétrica, si sus intersecciones con los ejes $X$ ∧ $Y$ son los puntos $A(3,0)$ y $B(0,-2)$, respectivamente.

**Solución**

| Datos | Procedimiento | Sustitución |
|---|---|---|
| $A(3,0)$<br>La abscisa es: $x=3 \Rightarrow a=3$<br>$B(0,-2)$<br>La ordenada es: $y=-2 \Rightarrow b=-2$ | **Fórmula:**<br>$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ | $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$<br>La ecuación en su forma simétrica es:<br>$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$ |

Ejemplo

Si la ecuación general de la recta es $5x-7y+35=0$, obtener la forma simétrica y trazar la gráfica correspondiente.

Proceso:

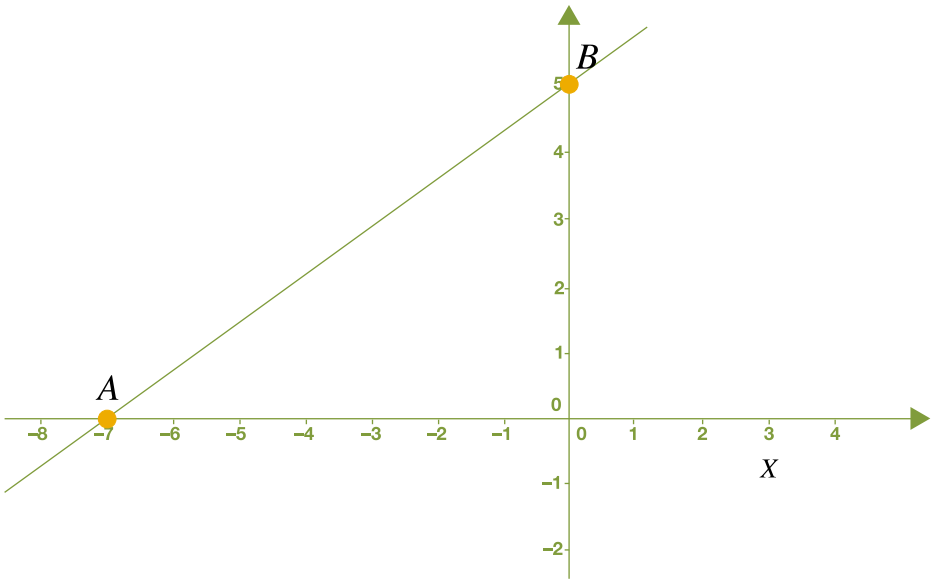
Se tiene que: $A=5, B=-7$ y $C=35$

Se sabe que: $x=a=-\frac{C}{A}$, entonces: $a=\frac{-35}{5}=-7, y=b=-\frac{C}{B}$

Se concluye que: $b=\frac{-35}{-7}=5$

La ecuación en su forma simétrica es: $\frac{x}{-7}+\frac{y}{5}=1$

La gráfica se muestra a continuación:



Ejercicio
Módulo 1

Calcular la ecuación de la recta en su forma simétrica, si pasa por los puntos $A(2,-3)$ y $B(-4,2)$. Trazar su gráfica.

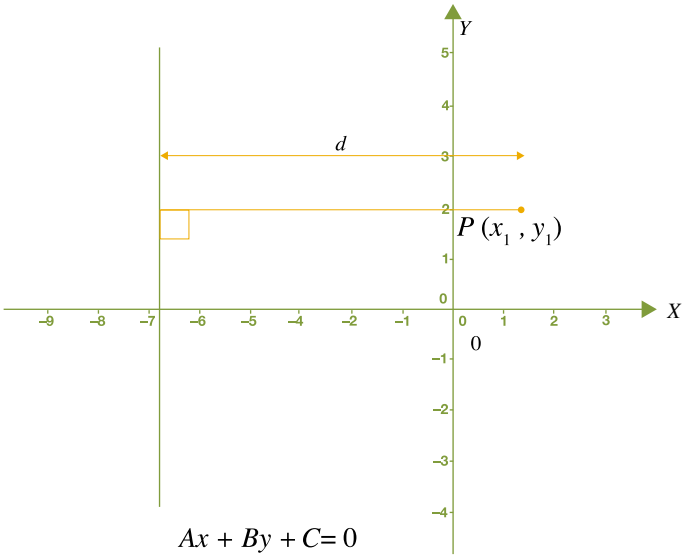
Basado en competencias

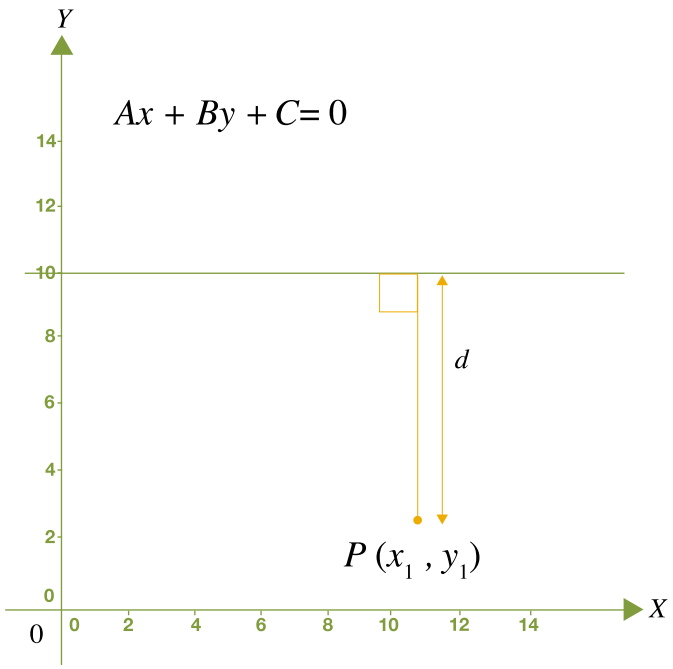
## 5. Distancia de un punto a una recta

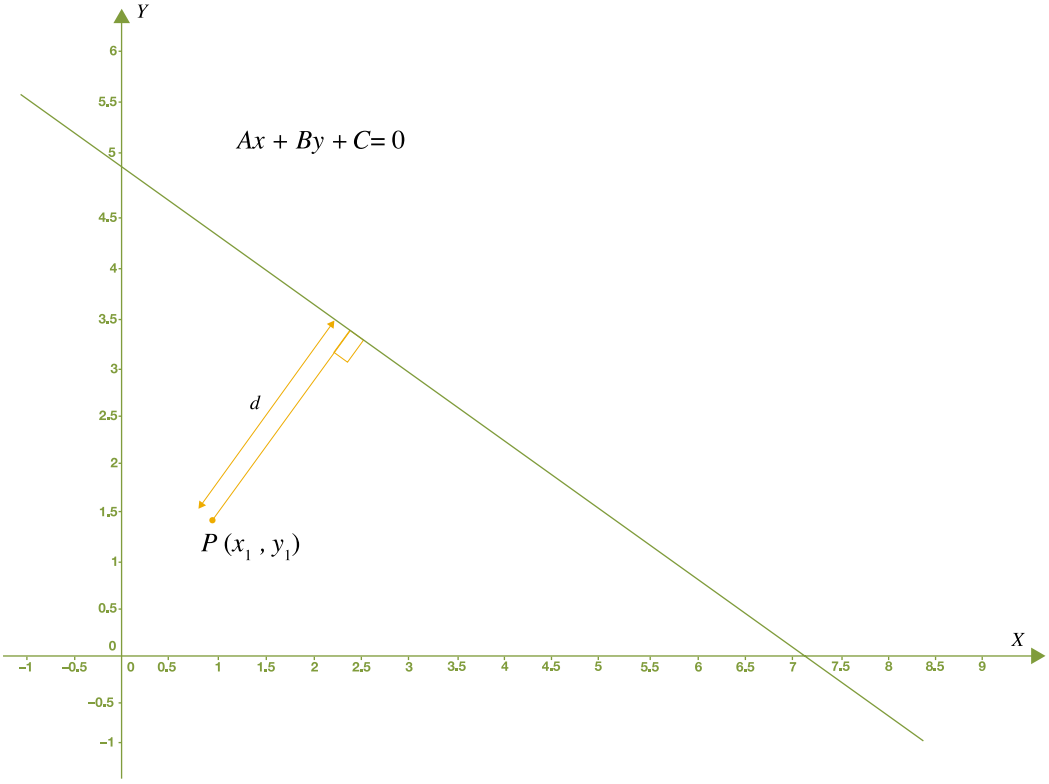
La distancia $d$ de la recta, dada por $Ax+By+C=0$, a un punto $P(x_1,y_1)$ se obtiene sustituyendo los valores de los coeficientes de la ecuación y las coordenadas del punto $P$ en la fórmula:

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Para todos los casos, la distancia del punto a la recta será perpendicular como se observa en las siguientes gráficas:




Y
Ax + By + C= 0
14
12
10
8
6
4
2
0
d
P (x1 , y1)
X
0
0
2
4
6
8
10
12
14


Y
Ax + By + C= 0
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
d
P (x1 , y1)
X
–1
–0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
–0.5
–1

Ejemplo

Calcular la distancia del punto $P(2,6)$ a la recta $4x+3y+5=0$ y trazar la gráfica.

**Solución**

| Datos | Fórmulas | Sustitución |
|---|---|---|
| $4x+3y+5=0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} A=4 \\ B=3 \\ C=5 \end{Bmatrix}$<br>$P(2,6) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1=2 \\ y_1=6 \end{Bmatrix}$ | $d=\dfrac{\lvert Ax+By+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ | $d=\dfrac{\lvert(4)(2)+(3)(6)+5\rvert}{\sqrt{4^2+3^2}}$<br>$d=\dfrac{\lvert 8+18+5\rvert}{\sqrt{25}}$<br>$d=\dfrac{31}{5}$<br>$d=6.2\ unidades$ |

Para graficar la recta $4x+3y+5=0$, se obtienen los puntos de intersección con los ejes coordenados y se localizan en el sistema coordenado.

$$si\ x=0 \Rightarrow 4(0)+3y+5=0$$
$$3y+5=0$$

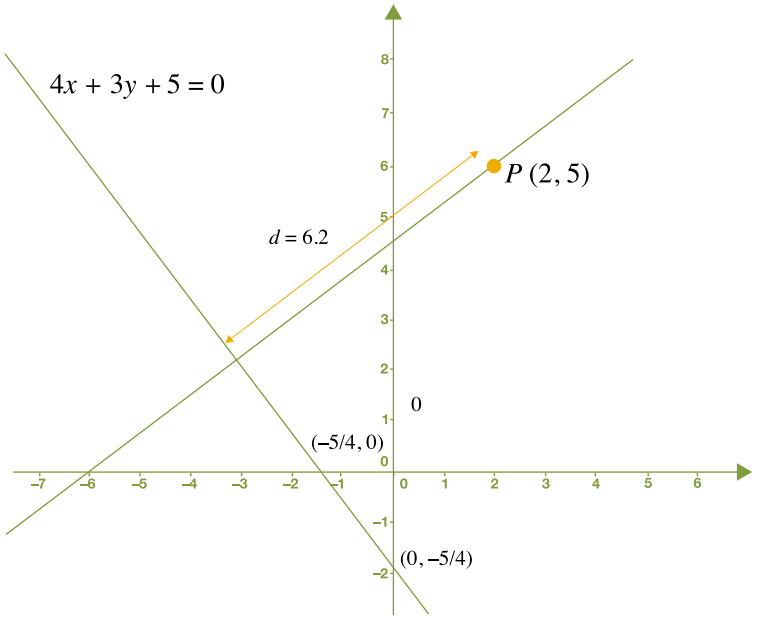
Despejando:

$$y=\frac{-5}{3} \Rightarrow P_1\left(0,-\frac{5}{3}\right) \text{ ó } (0,-1.6)$$

$$si\ y=0 \Rightarrow 4x+3(0)+5=0$$

Despejando:

$$y=\frac{-5}{4} \Rightarrow P_1\left(-\frac{5}{4},0\right) \text{ ó } (-1.25,0)$$



Ejemplo

Calcular el área del círculo, cuyo centro es el punto $C(2,3)$ y es tangente a la recta y que tiene por ecuación general $4x + 3y + 3 = 0$. Trazar la gráfica.

### Solución

Para que el círculo sea tangente a la recta, el radio debe ser perpendicular y debe tocar en un sólo punto; esto implica que el radio es la distancia desde el punto, en forma perpendicular a la recta.

La distancia del punto a la recta, será el radio del círculo buscado.

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

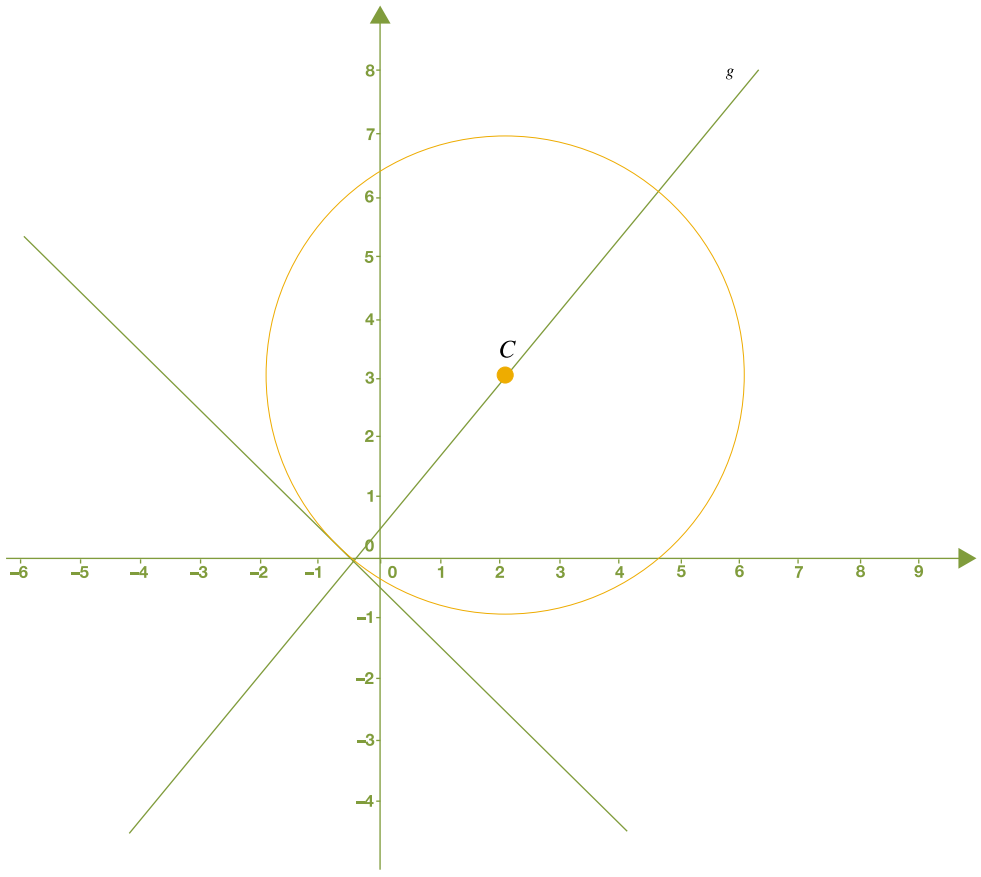
Efectuando las sustituciones, se tiene:

$$d = \frac{|(4)(2)+(3)(3)+3|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|8+9+3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} \Rightarrow r = 4$$

El área del círculo es: $\text{Área} = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi = (16)(3.1415)$

$$\text{Área} = 50.26\, u^2$$

La gráfica es:



Ejercicio
Módulo 1

Calcular la distancia del punto $Q(-3,1)$ a la recta $2x + 5y + 1 = 0$. Trazar su gráfica.

M1
Basado en competencias

# 6. Problemas de aplicación que involucren elementos de la recta

Ejemplo

Una inmobiliaria de apartamentos compra un edificio en $ 400000 y se deprecia $ 16000 por año durante un periodo de 25 años.

a) Escribir la ecuación lineal que proporcione el valor del edificio en términos de los años posteriores a la compra.
b) ¿En cuántos años el valor del edificio será de $ 196000?

**Solución**

| Datos | Fórmula |
|---|---|
| El valor del edificio será: $y$; los años serán: $x$<br><br>Entonces: $y = 400000$ cuando $x = 0$<br><br>Esto es: $(0,400000)$,<br><br>También: $b = 400000$<br><br>Un año después de la compra, el valor del edificio es:<br>$400000 - 16{,}000 = 384000$<br><br>Por lo que se tiene: $(1,384000)$ | $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$<br>Sustitución:<br>$$(0,400000) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 400000 \end{cases}$$<br>$$B(1,384000) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 384000 \end{cases}$$<br>$$m = \frac{384000 - (400000)}{1 - 0} = -16000$$<br>$$m = -16000$$ |

Sustituyendo datos en la ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$y = mx + b$$
$$y = -16000x + 400000$$

Es la ecuación que proporciona el valor del edificio, al cabo de años después de su compra.

Ahora:

Es necesario determinar el valor de $y = \$1960000$

Sustituyendo:

$$196000 = -16000x + 400000$$
$$-204000 = -16000x$$
$$12.75 = x$$

El valor depreciado del edificio será de $ 196000 exactamente al cabo de 12.75 años (12 años y 9 meses después de la compra).

En México, las enfermedades crónicas no transmisibles se incrementaron de manera alarmante en 20 años. En el año 2000, representaron el 73.3% de las causas de mortalidad contra el 49.8% en 1980. Suponiendo que el incremento de enfermedades crónicas no transmisibles tiene un comportamiento lineal del porcentaje de crecimiento contra el tiempo:

a) Obtener la ecuación en su forma general y trazar la gráfica de la recta que contiene los puntos (49.8, 1980) y (73.3, 2000).

$$\textit{Fórmula para calcular la pendiente } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2000 - 1980}{73.3 - 49.8}$$

$$m = \frac{20}{23.5} = 0.85$$

$$\textit{Fórmula para calcular la pendiente: } y + y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$2010 - 2000 = 0.85(x - 73.3)$$

$$10 = 0.85x - 62.305$$

$$10 + 62.3 = 0.85x$$

$$\frac{72.3}{0.85} = x$$

$$85.05 = x$$

$$2015 - 2010 = 0.85(x - 85.05)$$

$$5 = 0.85x - 72.3$$

$$5 + 72.3 = 0.85x$$

$$\frac{72.3}{0.85} = x$$

$$90.9 = x$$

$$2020 - 2015 = 0.85(x - 90.9)$$

$$5 = 0.85x - 77.265$$

$$5 + 77.3 = 0.85x$$

$$82.3 = 0.85x$$

$$\frac{82.3}{0.85} = x$$

$$96.08 = x$$

Consideran a los puntos:

$$P_1(49.8, 1980); P_2(73.3, 2000)$$

Para calcular la ecuación se tiene: $(y - y_1) = m(x - x_1)$

Sustituyendo:

$$y - 1980 = \frac{2000 - 1980}{73.3 - 49.8}(x - 49.8)$$

$$\frac{y - 1980}{2000 - 1980} = \frac{x - 49.8}{73.3 - 49.8}$$

Realizando operaciones:

$$\frac{y-1980}{20}=\frac{x-49.8}{23.5}$$

$$\frac{23.5}{20}y-\frac{1980(23.5)}{20}=x-49.8$$

$$\frac{47}{40}y-\frac{4653}{2}+49.8=x$$

$$x=\frac{47}{40}y-\frac{22767}{10}$$

$$x=1.18y-2276.7$$

$x-1.18y+2276.7=0$ *es la ecuación en forma general del comportamiento lineal*

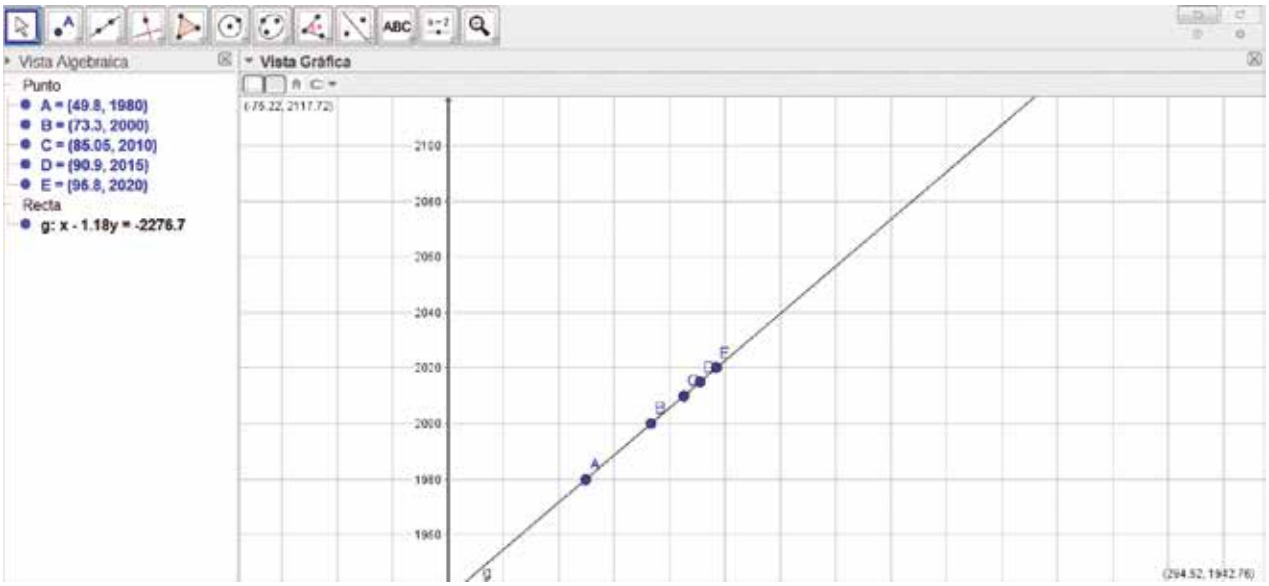
b) Incremento de las enfermedades crónicas no transmisibles en México en los años:

*En* 2010, *se presenta un incremento del* 85.05%

*En* 2015, *se presenta un incremento del* 90.9%

*En* 2020, *se presenta un incremento del* 96.8%

La gráfica es:



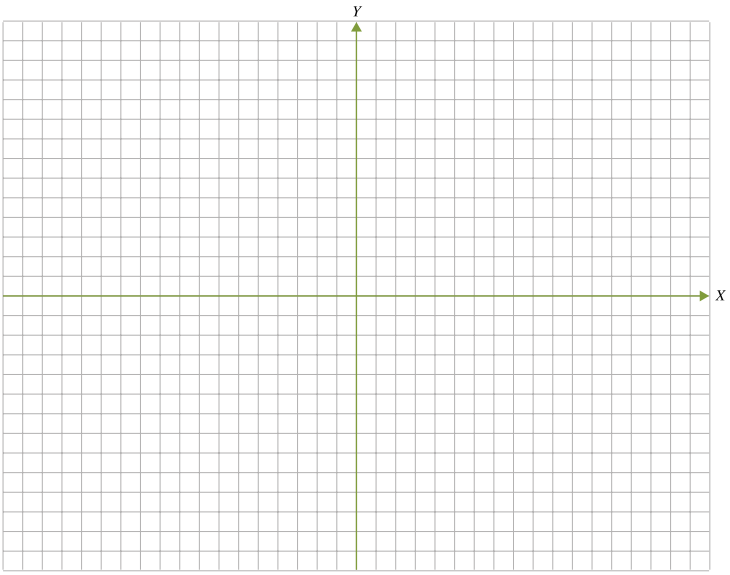
Ejercicios

# Ejercicios adicionales

## Plano cartesiano y trazo de segmentos

### Ejercicio 1

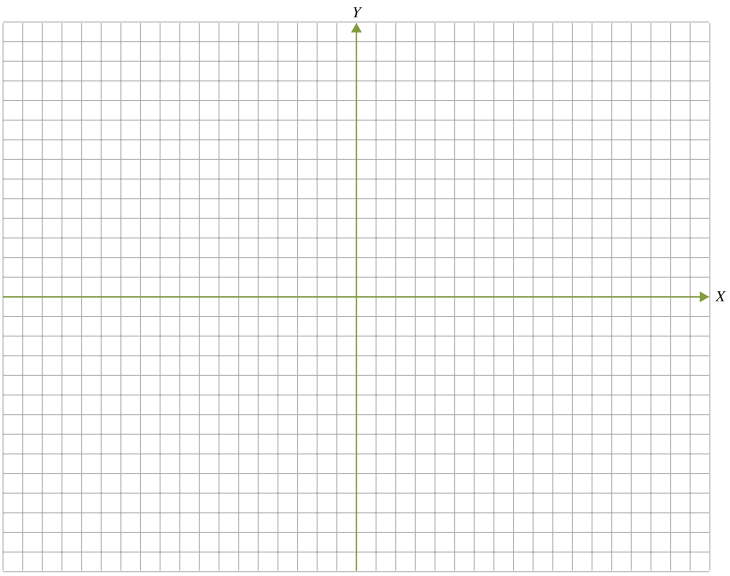
Localizar los puntos dados en el plano cartesiano:
$A(3,4), B(-12,5), C(-16,-11)$ y $D(7,-17)$




Basado en competencias

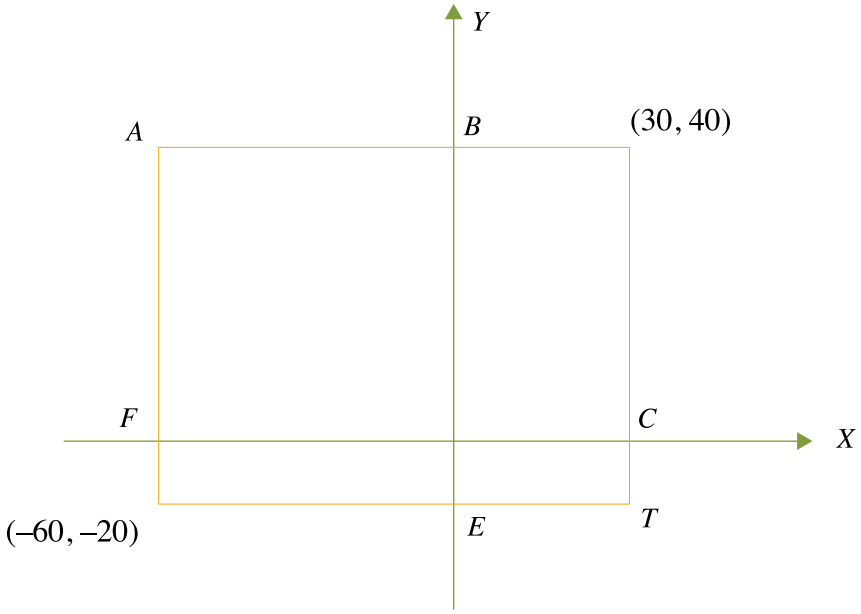
### Ejercicio 2

Las representaciones digitales están compuestas por puntos que se han activado o desactivado en un sistema de redes. Representar los puntos conectados a:
$(0,3), (4,12), (-3,15)$ y $(-10,0)$



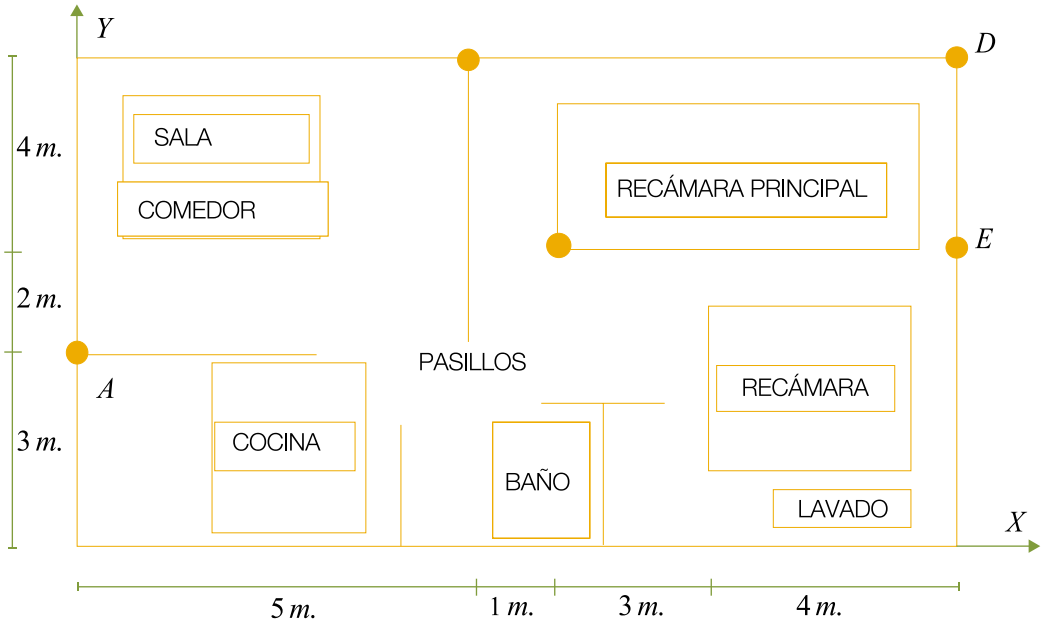
### Ejercicio 3

La siguiente figura es el plano de un parque y se muestran las coordenadas en *metros* de dos de sus esquinas. Determinar los pares ordenados de un árbol ($A$), de los baños ($B$), de la caseta de vigilancia ($C$), de una tienda ($T$), de la entrada ($E$) y de una fuente ($F$)




### Ejercicio 4

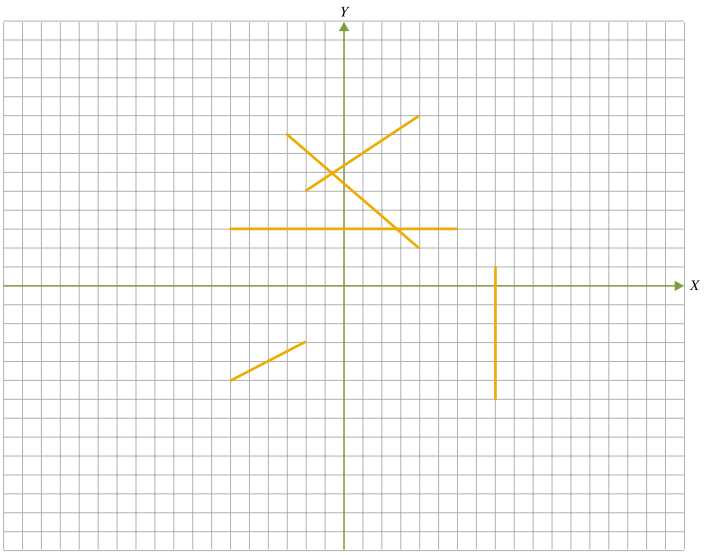
El plano que se muestra a continuación corresponde a una casa habitación. Determinar las coordenadas de los puntos seleccionados.



### Ejercicio 5

Colocar en el plano las letras que correspondan a los extremos de los segmentos marcados.

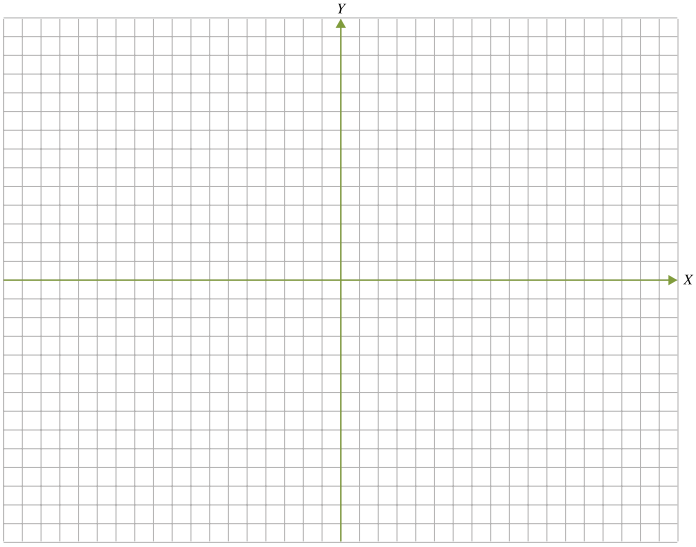
1. $C(-3,8), D(4,2)$
2. $E(6,3), F(-6,3)$
3. $G(8,1), H(8,-6)$
4. $I(-2,-3), J(-6,-5)$
5. $K(-2,5), L(4,9)$






### Ejercicio 6

Los vértices de un triángulo están situados en los puntos $A(1,-5), B(5,2)$ y $C(0,-3)$. Determinar los puntos medios de los lados $AB$ y $BC$.

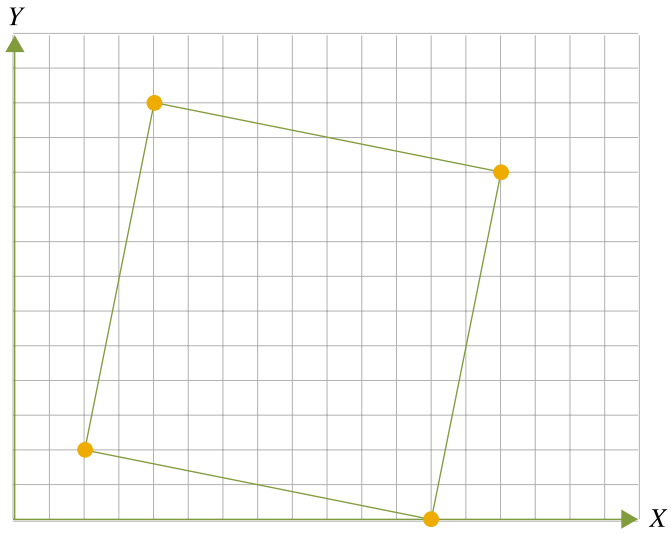



R: $Pm\ AB = (3,-1.5)$

$Pm\ BC = (2.5,-0.5)$

### Ejercicio 7

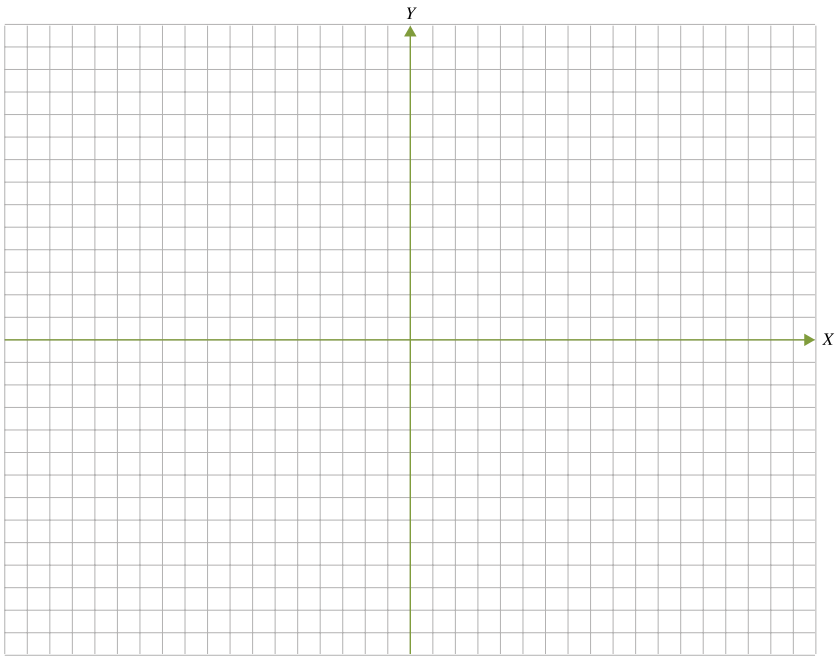
El siguiente dibujo muestra el croquis de un terreno. Calcular los puntos medios de sus diagonales.




**R:** $Pm = (8,6)$ *para ambas diagonales*

### Ejercicio 8

Calcular la longitud de la mediana del lado $AC$ en el triángulo cuyos vértices son:
$A(3,7), B(-4,0)$ y $C(1,-4)$

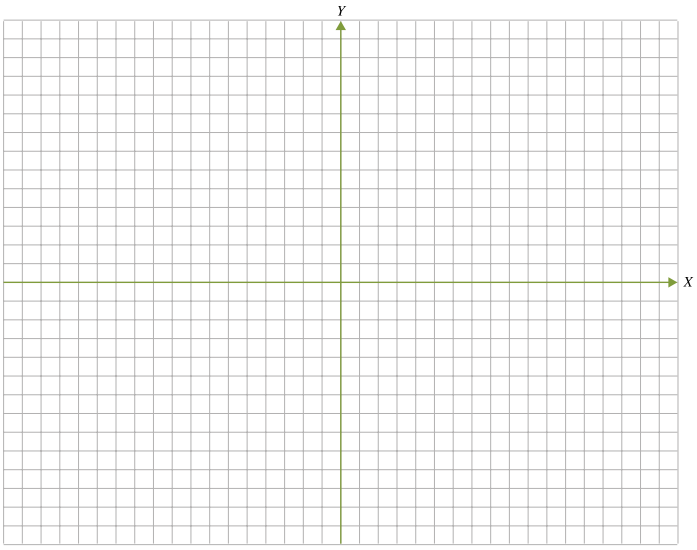



**R:** $d = 6,18$

### Ejercicio 9

Dados los puntos $A(-4,-1)$, $B(2,5)$ y $C(6,-3)$. Calcular:

a) El punto medio del segmento $AB$.
b) Los puntos de trisección del segmento que une el punto medio anterior con el punto $C$.




**R:** $Pm\ AB = (-1,2)$

$T_1\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right), T_2\left(\frac{11}{3},-\frac{4}{3}\right)$

### Ejercicio 10

Determinar las coordenadas de los dos puntos que dividen al segmento en tres partes iguales y cuyos extremos son $B(9,11)$ y $C(6,2)$.

**R:** $T_1(8,8), T_2(7,5)$

### Ejercicio 11

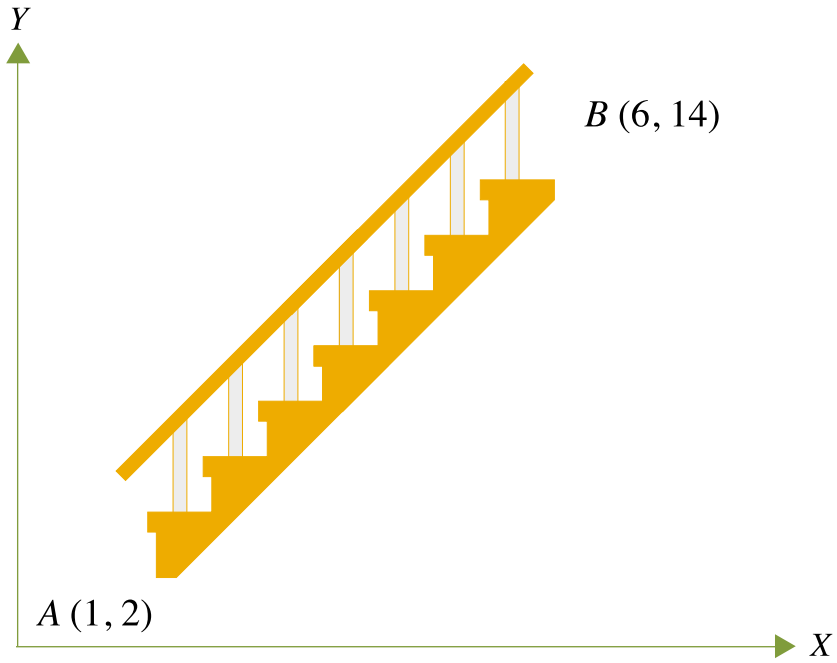
Si se desea dividir al segmento en cinco partes iguales, cuyos extremos son $A(3,2)$ y $B(15,6)$, calcular las coordenadas del cuarto punto de división tomado desde $A$.

**R:** $P\left(\frac{63}{5},\frac{26}{5}\right)$

## Distancia entre dos puntos

### Ejercicio 12

Calcular la longitud de la escalera, si las coordenadas mostradas están en metros.

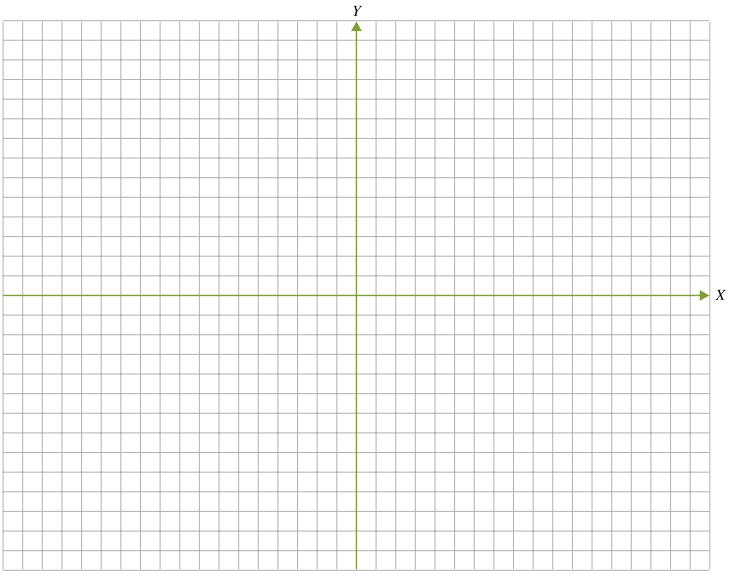



**R:** $d(A,B) = 13\,m.$

### Ejercicio 13

Utilizando el concepto de distancia, comprobar que los siguientes puntos forman un triángulo isósceles:

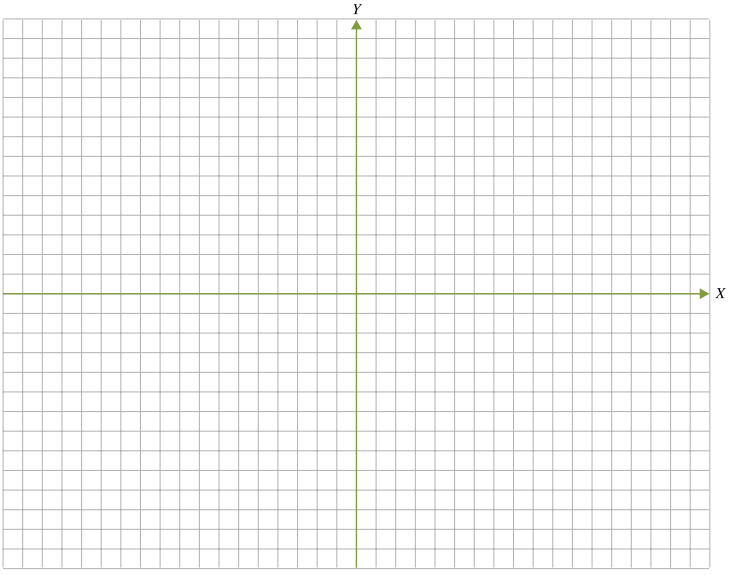
$A(-3,4), B(4,3)$ y $O(0,0)$




R: $d(A,B)=\sqrt{50}, d(A,O)=5, d(B,O)=5$

### Ejercicio 14

Utilizando el concepto de distancia y el teorema de Pitágoras, comprobar que los siguientes puntos forman un triángulo rectángulo: $A(-4,-2), B(-3,5)$ y $C(0,1)$




R: $d(A,B)=\sqrt{50}, d(A,O)=5, d(B,C)=5; 5^2+5^2=\sqrt{(50)^2}$

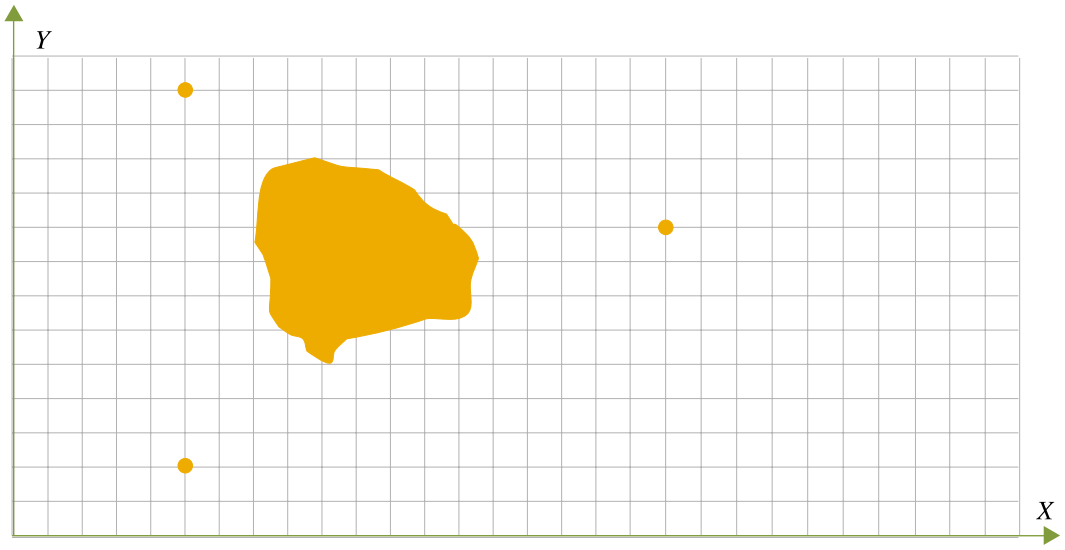
### Ejercicio 15

El siguiente dibujo muestra el zócalo de la ciudad de Toluca y los puntos marcados representan los sitios en los que se ubican la asta bandera, una estatua y una fuente. ¿Qué distancia recorrerá una persona que está en la fuente y avanza hacia la asta bandera, luego a la estatua y regresa a la fuente, si cada cuadro representa una losa de $2\ m.$ x $2\ m.$ de lado?

**R:** $d = 86.05\ m.$

### Ejercicio 16

En una calle de Toluca hubo un hundimiento de tierra por el reblandecimiento del suelo causado por las lluvias. La zona afectada está entre los postes marcados. ¿Cuál será la longitud de la cinta de seguridad que deba usarse para acordonar la zona si cada cuadro representa $1\ m.$ x $1\ m$?

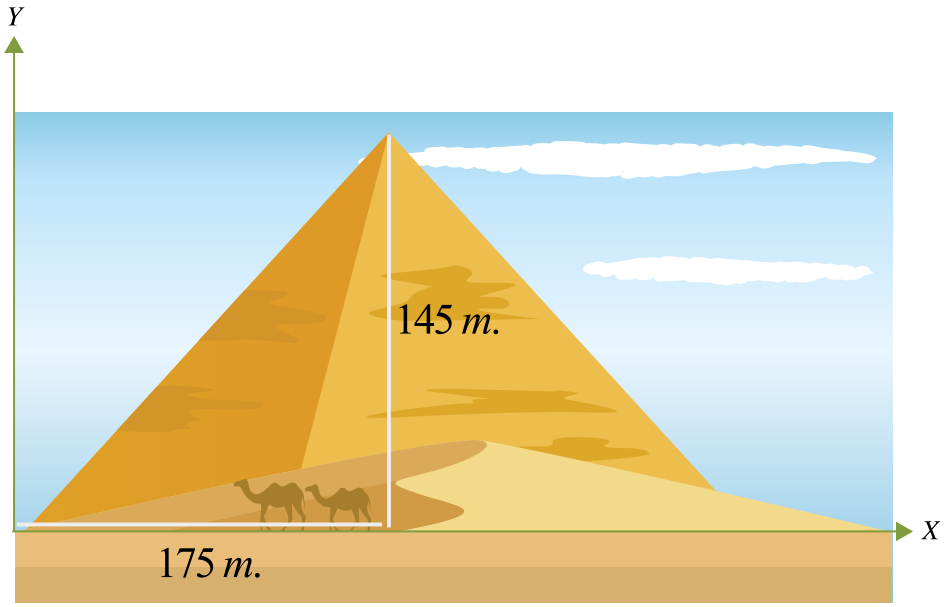



**R:** $d = 41.21\ m.$

## Pendiente de una recta

### Ejercicio 17

Utilizando la información de la figura, ¿cuál es la pendiente y el ángulo de inclinación de la pirámide?




R: $m = \frac{29}{35}, \alpha = 39.64^{\circ}$

### Ejercicio 18

Un avión que vuela sobre Toluca a una altura de $3{,}300\ m.$ empieza su descenso en línea recta hacia el D.F. ¿Qué pendiente toma el avión al descender, si hay $55\ km.$ entre cada ciudad?

R: $m = -0.06$

### Ejercicio 19

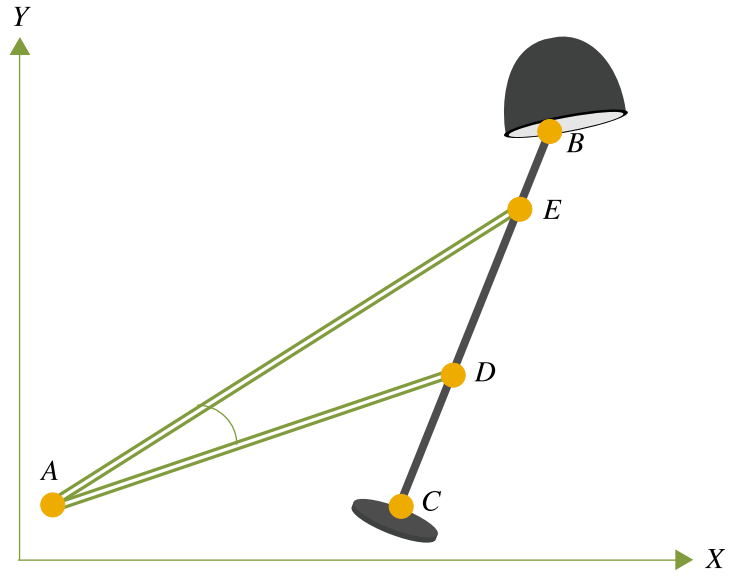
Calcular el ángulo interno $A$ del paralelogramo, cuyos vértices son los puntos $A(1,1), B(3,5), C(11,6)$ y $D(9,2)$. Graficar.

R: $\angle A = 56.31^\circ$

### Ejercicio 20

Una lámpara caída está sujeta por dos cables, como se muestra en la figura. Calcular las coordenadas de los puntos $D$ y $E$ que dividen al poste en tres partes iguales. ¿Cuál es el valor del ángulo $A$?

$A(1,2)$ $B(9,11)$ $C(6,2)$




R: $D(7,5), E(8,8), \angle A = 14.036^\circ$

### Ejercicio 21

Verificar que el cuadrilátero $ABCD$, cuyos vértices son $A(2,6), B(5,1), C(-1,-6)$ y $D(-4,-1)$, es un paralelogramo.

R: $m_{AB} = m_{CD} = -5/3, m_{AD} = m_{BC}\ 7/6$

### Ejercicio 22

Verificar que en el cuadrilátero $ABCD$, cuyos vértices son $A(2,-5), B(7,-3), C(6,1)$ y $D(-2,3)$, las diagonales $AC$ y $BD$, son perpendiculares entre sí. Graficar

R: $(m_{AC})(m_{BD}) = (3/2)(-2/3) = -1$

### Ejercicio 23

Utilizando la condición de perpendicularidad, comprobar que el triángulo, cuyos vértices son $A(8,1), B(3,6)$, y $C(-2,1)$, es rectángulo. Graficar.

R: $(m_{AC})(m_{BD}) = (-1)(1) = -1, \therefore AB \perp BC$

## Ecuación de la recta en sus diferentes formas

### Ejercicio 24

Para cada uno de los siguientes incisos, determinar la ecuación en forma general de la recta que pasa por los puntos determinados. Trazar la gráfica correspondiente.

a) $A(-3,-5), B(5,1)$ R: $3x-4y-11=0$

b) $P(-2,4), Q(3,-1)$ R: $x+y-2=0$

c) $M(-2,4), N(6,-3)$ R: $x+2y=0$

d) $A(0,1), B(3,5)$ R: $4x-3y+3=0$

e) $P(-4,1), Q(3,3)$ R: $2x-7y+15=0$

### Ejercicio 25

Para cada uno de los siguientes incisos, determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto determinado y tiene una pendiente conocida. Trazar la gráfica correspondiente.

a) $A(-3,-1), m=\frac{3}{4}$ R: $3x-4y+5=0$

b) $P(2,3), m=-\frac{2}{5}$ R: $2x+5y-19=0$

c) $Q(-4,2), m=\frac{2}{3}$ R: $2x-3y+14=0$

d) $N(4,5), m=-\frac{4}{7}$ R: $4x+7y-51=0$

e) $P(-1,-2), m=3$ R: $3x-y+1=0$

### Ejercicio 26

Determinar la ecuación en forma general de la recta que pasa por el punto A (4,5) y tiene una pendiente $m=2$.

R: $3x-y+1=0$

### Ejercicio 27

Determinar la ecuación en forma general de la recta que pasa por los puntos $A(-1,2)$ y $B(2,1)$

R: $x+3y-5=0$

### Ejercicio 28

Sea el triángulo con vértices en los puntos $A(3,4), B(0,-1)$ y $C(-2,3)$, calcular las ecuaciones de sus lados.

R: *lado AB:* $5x-3y-3=0$, *lado AC:* $x-5y+17=0$, *lado BC:* $2x+y+1=0$

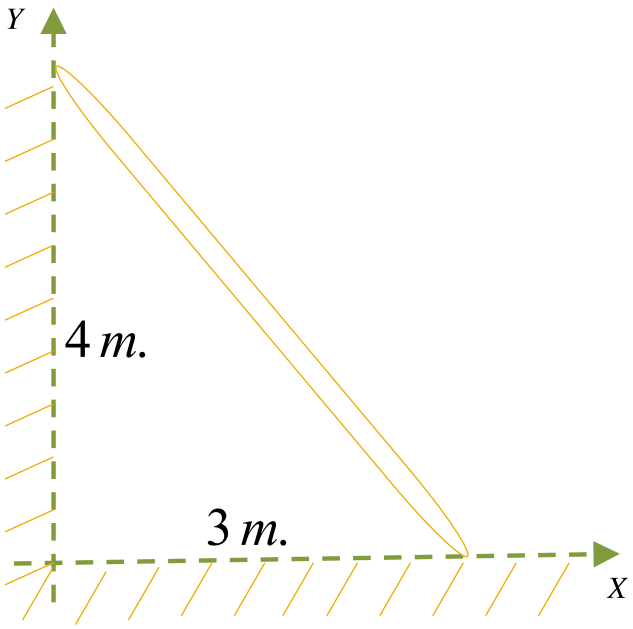
### Ejercicio 29

La ecuación de una recta es: $3x - 2y + 12 = 0$. Calcular el valor de su pendiente y las intercepciones con los ejes coordenados. Realizar la Gráfica.

**R:** $m = \frac{3}{2}, (-4,0)(0,6)$

### Ejercicio 30

Una escalera está recargada en una pared formando un triángulo rectángulo junto con el piso, como se observa en la figura. Obtener la ecuación de la recta que representa a la escalera, en forma simétrica y en forma general.




**R:** $m = -\frac{4}{3}, \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1, 4x + 3y - 12 = 0$

### Ejercicio 31

Calcular el área del triángulo rectángulo, formado por los ejes coordenados y la recta, cuya ecuación es $5x - 3y - 15 = 0$. Trazar la gráfica.

**R:** $7.5u^2$

### Ejercicio 32

Determinar la ecuación de la recta que es paralela al segmento, con extremos en los puntos $A(0,-2), B(5,2)$ y pasa por el punto $P(-3,1)$. Graficar.

**R:** $5x - 5y + 17 = 0$

### Ejercicio 33

Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2,3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $5x-3y-15=0$.

R: $5x-3y+19=0$

### Ejercicio 34

Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,-1)$ y es perpendicular a otra cuya, ecuación es $3x-4y+5=0$: . Graficar ambas en un mismo plano.

R: $4x+3y-5=0$

### Ejercicio 35

Una recta tiene por ecuación: $x-2y+4=0$. Determinar la ecuación de la recta perpendicular a ésta y pasa por el punto medio de las intercepciones de la recta dada con los ejes coordenados.

R: $2x+y+3=0$

Basado en competencias

## Distancia de un punto a una recta

### Ejercicio 36

Calcular la distancia del punto $(5,-3)$ a la recta $3x-4y-12=0$. Trazar la gráfica.

R: $d=3$

### Ejercicio 37

Un triángulo tiene como vértices los puntos $A(1,-4)$, $B(-2,3)$ y $C(2,2)$. Calcular la altura correspondiente al lado $AB$.

R: $d=3.28$

### Ejercicio 38

Los lados de un triángulo están sobre las rectas:

$$3x+7y+13=0 \wedge 9x-4y-29=0$$

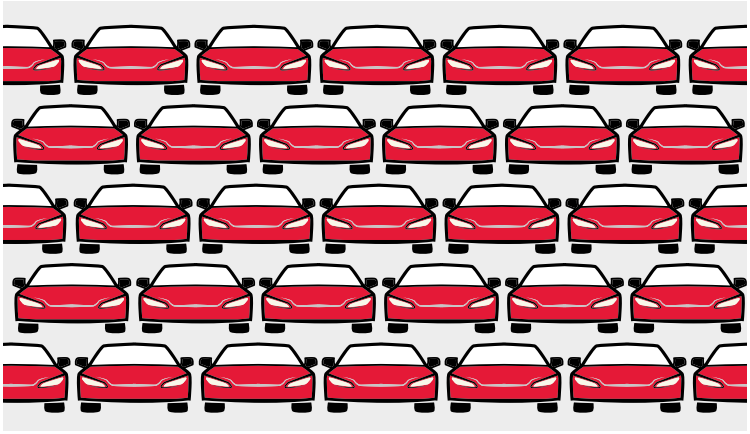
Calcular las coordenadas de sus vértices y realizar la gráfica.

## Situación problema que involucra elementos de la recta

### Ejercicio 39

En el año 2002, se produjeron 1,804,997 vehículos en el país; en el año 2013, se produjeron 2,933,465. Admitiendo un aumento constante cada año:

a. ¿Cuál fue la tasa promedio de producción anual?
b. Determinar la ecuación de la recta en forma general para la producción ($y$) de vehículos cada año ($x$).
c. ¿Cuántos vehículos se produjeron en 2010?

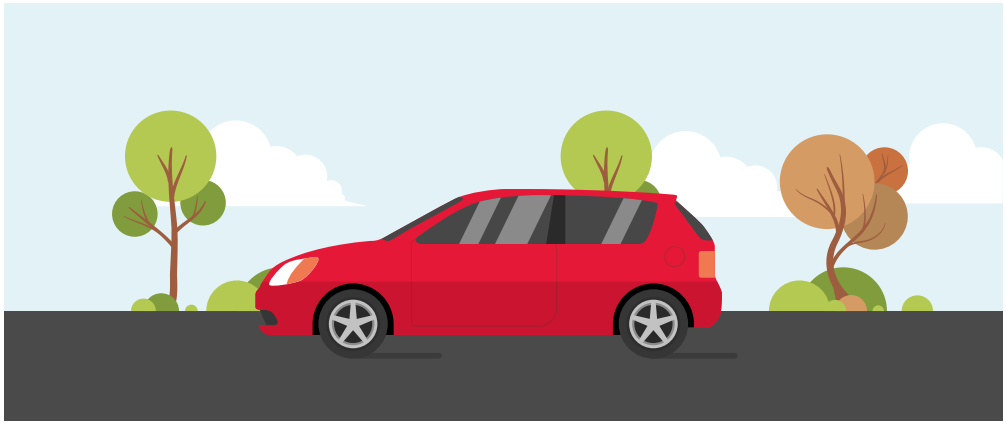


R: $\$1025888\ vehículos/año, 1025888x - y - 203576179 = 0, 26257018$

### Ejercicio 40

Un automóvil, adquirido por una empresa para uso del gerente a un precio de $240,000, se deprecia linealmente durante cinco años.

a. ¿Cuál fue la tasa promedio de depreciación anual?
b. Determinar la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen que exprese el valor ($y$) del vehículo cada año ($x$)
c. ¿Cuál será el valor contable del automóvil al fin de tres años?



R: $\$48000/año, y = -48000x + 240000, \$96000$

# Módulo 2

## Circunferencia

## Competencias genéricas[1]

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la empleo de medios, códigos y herramientas apropiados.

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

5.2 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar datos.

[1]Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).

# Competencias básicas y extendidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

M2
Basado en competencias

**Propósito**
Identificar a la circunferencia con una ecuación determinada, conocer su aplicación y los elementos que la conforman, así como la relación que tiene con otras curvas.

# INTRODUCCIÓN

Al observar el entorno nos encontramos con que la forma circular se presenta en el diseño de imágenes decorativas, elementos de construcciones arquitectónicas, jardines, elementos de vehículos, entre muchos otros lugares.

Este módulo inicia con el análisis de la diferencia entre circunferencia y círculo, así como con sus principales elementos. Posteriormente, se deducen las ecuaciones que rigen la construcción de una circunferencia, con centro en el origen, con centro en un punto fuera del origen y la ecuación general.

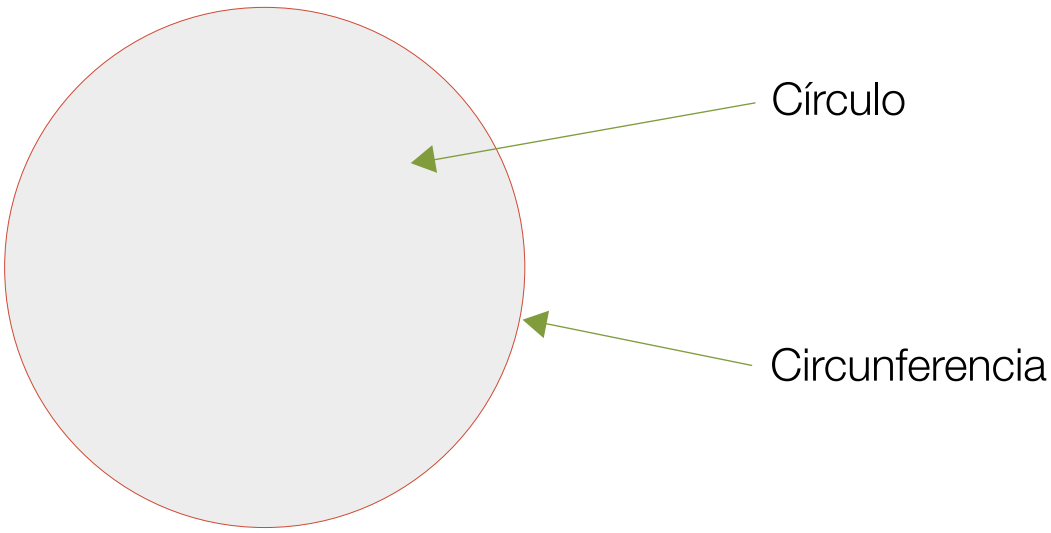
Luego se realizará la aplicación de dichas ecuaciones a los problemas del entorno que lo requieran, en función de sus posiciones respecto a otras circunferencias o a una recta, así como la medida de su longitud y el área del círculo.

El conocimiento de la circunferencia y el círculo es muy importante en la vida cotidiana, ya que estudiándolos podremos comprender su aplicación en ruedas de automóviles, discos, algunas construcciones arquitectónicas, glorietas, entre otras.

# 1. Definición de circunferencia como lugar geométrico

Es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

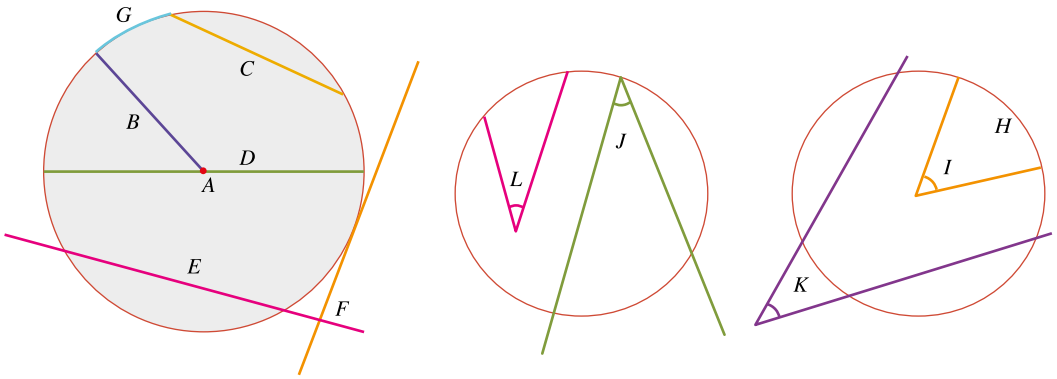
Definición de círculo: es el conjunto de puntos limitados por la circunferencia.




Área del Círculo: $A = \pi r^2$

Perímetro de la Circunferencia: $P = 2\pi r$

## 1.1 Elementos de la circunferencia y el círculo.




A) Centro: Punto fijo del círculo del cual equidistan los puntos de la circunferencia.

B) Radio: Segmento que une el centro con uno de los puntos de la circunferencia.

C) Cuerda: Segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

D) Diámetro: Cuerda que pasa por el centro (su magnitud es igual a dos radios).

E) Recta secante: Es la recta que intersecta a la circunferencia en dos puntos.

F) Recta tangente: Es la recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto.

G) Arco: Es la parte de la circunferencia limitada por dos extremos.

H) Sector circular: Parte del círculo que esta entre dos radios.

I) Ángulo central: Es aquél que tiene su vértice en el centro del círculo y sus lados son radios del mismo.

J) Ángulo inscrito: Es aquél que tiene su vértice en uno de los puntos de la circunferencia.

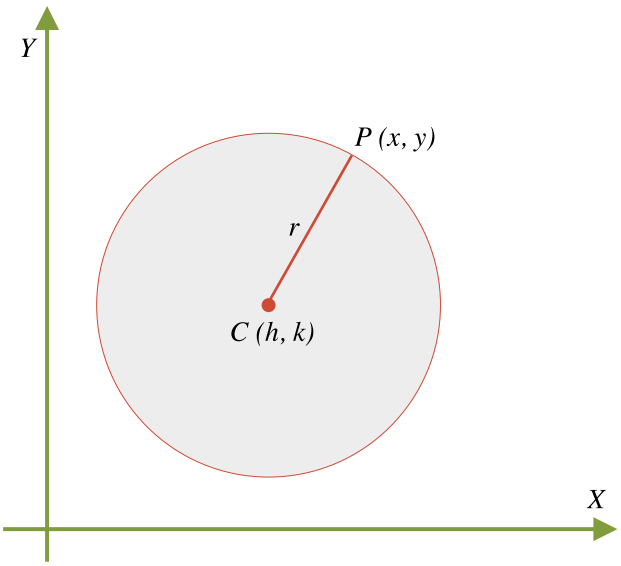
K) Ángulo exterior: Es aquél cuyo vértice está fuera de la circunferencia y su distancia al centro es mayor que el radio.

L) Ángulo interior: Es aquél cuyo vértice está dentro del círculo y su distancia al centro es menor que el radio del mismo.

M2
Basado en competencias

# 2. Ecuación de la circunferencia en sus diferentes formas

## 2.1. Forma ordinaria:




Considerando un punto de la circunferencia $P(x,y)$ de centro $C(h,k)$ y radio $r$, por definición de circunferencia:

$$\overline{|CP|} = r$$

Se puede expresar analíticamente en la forma:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = r$$

O bien, elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

La cual se conoce como **forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia.**

Ejemplo

Obtener la ecuación en forma ordinaria de la circunferencia cuyo centro está en el punto $C(2,-3)$) y una recta tangente tiene por ecuación $8x-6y-48=0$.

**Solución**

Para el radio, empleamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$r=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Con los valores correspondientes, se tiene:

$$r=\frac{|8(2)+(-6)(-3)+(-48)|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}}$$

$$r=1.4$$

Sustituyendo en la expresión:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Se tiene

$$(x-2)^2+(y-(-3))^2=(1.4)^2$$

O bien

$$(x-2)^2+(y+3)^2=1.96$$

M2 Basado en competencias

Ejercicio
Módulo 2

Obtener la ecuación en forma de la circunferencia de radio 4 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $x-2y+1=0, 2x+3y-12=0$.

## 2.2. Forma canónica

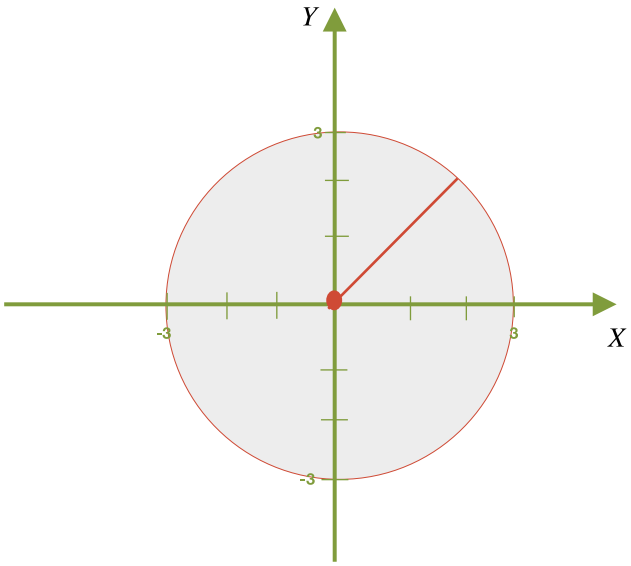
Se aplica para el caso en que el centro coincide con el origen del sistema de referencia, $h = k = 0$, la circunferencia de centro en el origen y radio r tiene por ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

A ésta se le conoce como forma canónica de la ecuación de la circunferencia.

Ejemplo

Escribir la ecuación de la circunferencia de centro en el origen del sistema de referencia y radio 3. Graficar.




Ecuación: $x^2 + y^2 = (3)^2$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Ejercicio
Módulo 2

Graficar una circunferencia de centro en el origen y radio 5. Obtener su ecuación y localizar con diferentes colores todos sus puntos y rectas notables.

M2
Basado en competencias

Ejemplo

Se requiere colocar en el techo de una casa un domo circular que se modela por la ecuación $(x-7)^2+(y-5)^2=9$. Obtener el centro y radio, así como trazar la gráfica correspondiente.

**Solución**

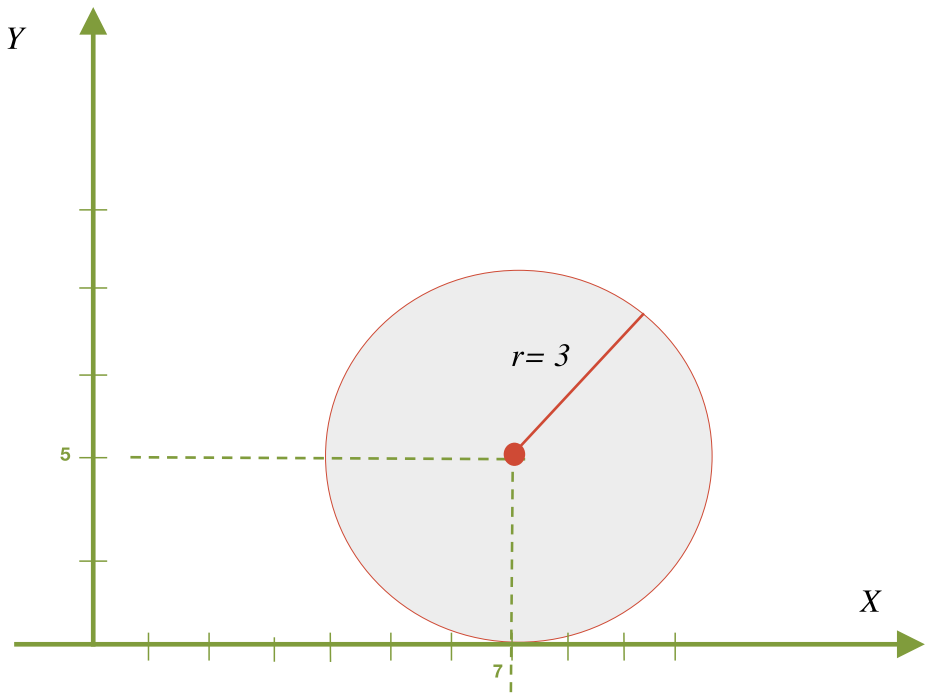
La ecuación dada es de la forma:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Por lo que, $h=7, k=5$ y $r^2=9$

Entonces, el centro está en $C(7,5)$ y el radio es $r=3$.

Gráfica:



## 2.3. Forma general

Al desarrollar la ecuación en forma ordinaria de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ y al ordenar se obtiene:

$$x^2+y^2-2xh-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

Haciendo $D=-2h,\ E=-2k$ y $F=h^2+k^2-r^2$, se obtiene la forma:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Que corresponde a la forma general de la ecuación de la circunferencia.

Para transformar de la forma general a la forma ordinaria, se completan trinomios cuadrados perfectos de la siguiente manera:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Al agrupar términos:

$$x^2+Dx+y^2+Ey=-F$$

Al sumar en ambos miembros $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}$ y ordenándolo, se obtiene:

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

Donde:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

Si $D^2+E^2-4F>0$, la ecuación anterior representa una circunferencia con centro en el punto $C\left(-\frac{D}{2},\frac{E}{2}\right)$ y radio $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

**Ejemplo**

Transformar la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ a la forma ordinaria, identificar el centro y el radio. Graficar.

**Solución**

Ordenando y agrupando términos:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = -4$$

Completando cuadrados en $x \wedge y$:

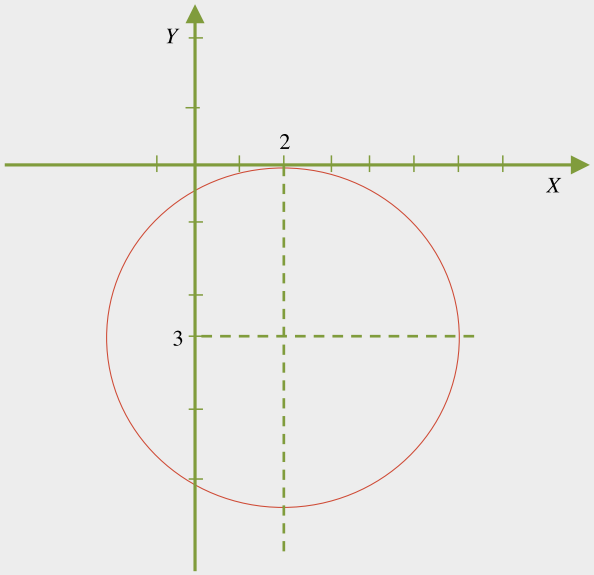
$$x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + y^2 + 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -4 + \left(\frac{4}{2}\right) + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

Se obtiene:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$$

La cual corresponde a la ecuación de una circunferencia de centro $C(2,-3)$ y radio $r = 3$

Gráfica:




M2
Basado en competencias

**Ejercicio**
Módulo 2

Si los extremos de uno de los diámetros de una circunferencia son los puntos $A(2,4)$ y $B(6,-2)$, determinar:

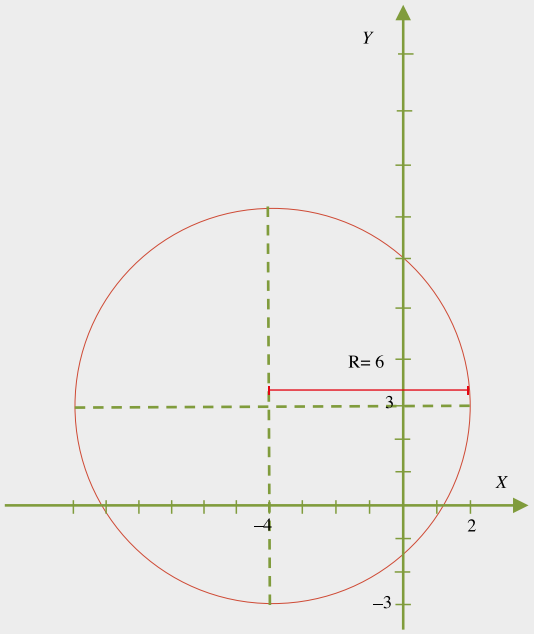
a) Las coordenadas del centro.
b) El radio de la circunferencia.
c) Trazar su gráfica.
d) Obtener su ecuación en forma general.

Ejemplo

Si el centro de la base de una bodega circular para almacenar maíz se ubica en el punto $C(-4,3)$ y su radio mide $6\ m$. Trazar la gráfica correspondiente y obtener la ecuación general.

**Solución**

Gráfica




Para la ecuación: $h = 4$ y $k = 3$

Sustituyendo en la ecuación ordinaria:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-(-4))^2+(y-3)^2=6^2$$

De donde se tiene:

$$(x+4)^2+(y-3)^2=36$$

Desarrollando la ecuación:

$$x^2+8x+16+y^2-6y+9-36=0$$

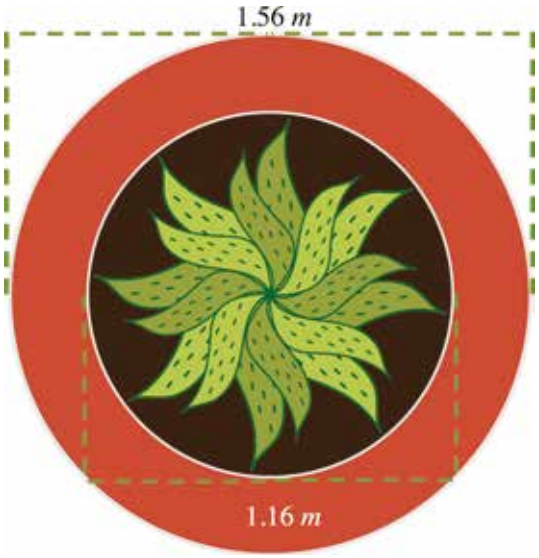
Ordenando y simplificando:

$$x^2+y^2+8x-6y-11=0$$

**Ejercicio**
Módulo 2

Si el centro de la jardinera se localiza en el punto $C(3,2)$ y tiene un diámetro interior de $1.16$ *m.* y un diámetro exterior de $1.56$ *m.*, como se muestra:

a) Trazar la gráfica correspondiente en el sistema de referencia.
b) Obtener el área formada entre las dos circunferencias.
c) Obtener las ecuaciones en forma general de las circunferencias.




M2
Basado en competencias

# Ejercicios adicionales

Ejercicios

Resolver los ejercicios planteados, justificando la respuesta correspondiente.

1. Trazar la gráfica de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 16 = 0$ y contestar las siguientes preguntas.

   a) ¿En qué puntos la circunferencia intersecta al eje $x$?

   b) ¿En qué puntos la circunferencia intersecta al eje $y$?

   c) ¿Cuál es su dominio?

   d) ¿Cuál es su rango?

2. Escribir las coordenadas del centro y radio de la circunferencia cuya ecuación es:

   $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9$ Centro $C$ ( ) Radio $r =$

3. Obtener el radio y trazar la gráfica de la circunferencia cuya ecuación es: $5x^2 + 5y^2 - 45 = 0$.

4. Una circunferencia tiene su centro en el punto $(0,-2)$ y es tangente a la recta $5x - 2y + 12 = 0$. Calcula su ecuación en forma ordinaria.

5. Una circunferencia contiene a los puntos $A(3,7)$ y $B(2,6)$ y su centro está sobre el eje $y$.

   a) Trazar la gráfica que modela la situación-problema y obtener la magnitud del radio.

   b) Determinar la ecuación de la circunferencia.

6. Una pieza del motor de un automóvil está diseñada con dos circunferencias concéntricas, una de ellas con un radio de 26 *mm.* y la otra con uno de 28 *mm.* Trazar las circunferencias en el primer cuadrante de tal manera que la mayor sea tangente a los ejes coordenados de un plano cartesiano y contestar las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuáles son las coordenadas del centro de ambas circunferencias?

   b) ¿Cuál es el área del espesor de la pieza?

   c) ¿Cuál es la forma ordinaria de las circunferencias representadas?

7. Se tiene un mecanismo de 2 engranes que coinciden en el origen de un sistema de referencia y sus centros se ubican sobre el eje $x$. El engrane de la izquierda tiene un diámetro de 30 *cm.* y el de la derecha un radio de 40 *cm.*

   a) Trazar la gráfica que representa ambas circunferencias usando una escala adecuada.

   b) Determinar la forma ordinaria de ambas circunferencias.

8. Transformar las siguientes ecuaciones en forma ordinaria de la circunferencia a su forma general y realizar su gráfica.

   a) $(x-3)^2+(y-2)^2=9$

   b) $(x+5)^2+(y-4)^2-36=0$

   c) $2(x-9)^2+2(6-y)^2=50$



9. Transformar cada una de las ecuaciones de circunferencia a su forma ordinaria, identificar el centro y el radio, realizar su gráfica.

   a) $2x^2+2y^2+8x+12y-6=0$

   b) $3x^2+3y^2-6x+48y+87=0$

10. Comprobar si las circunferencias: $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ y $3x^2+3y-6x-18y-78=0$, son concéntricas. Se dice que dos o más circunferencias son concéntricas cuando sus centros tienen la misma posición.

11. Si un aspersor tiene un alcance de $12\ m$, obtener la ecuación en forma general de la circunferencia que describe cuando riega, si su centro se ubica en el punto $(3,6)$.

12. Se desea construir una fuente en forma circular para lo que se realizan estudios y se deduce su ecuación en la forma $2x^2+2y^2-8x+28y+86=0$. Obtener su ecuación en forma ordinaria, centro, radio y graficar.

13. Se diseña una fuente circular cuyas coordenadas del centro son $(120,\ 180)$ y su diámetro es de $8\ m$.

   a) Trazar la gráfica.

   b) Obtener la ecuación en forma general de la circunferencia que representa a la fuente.

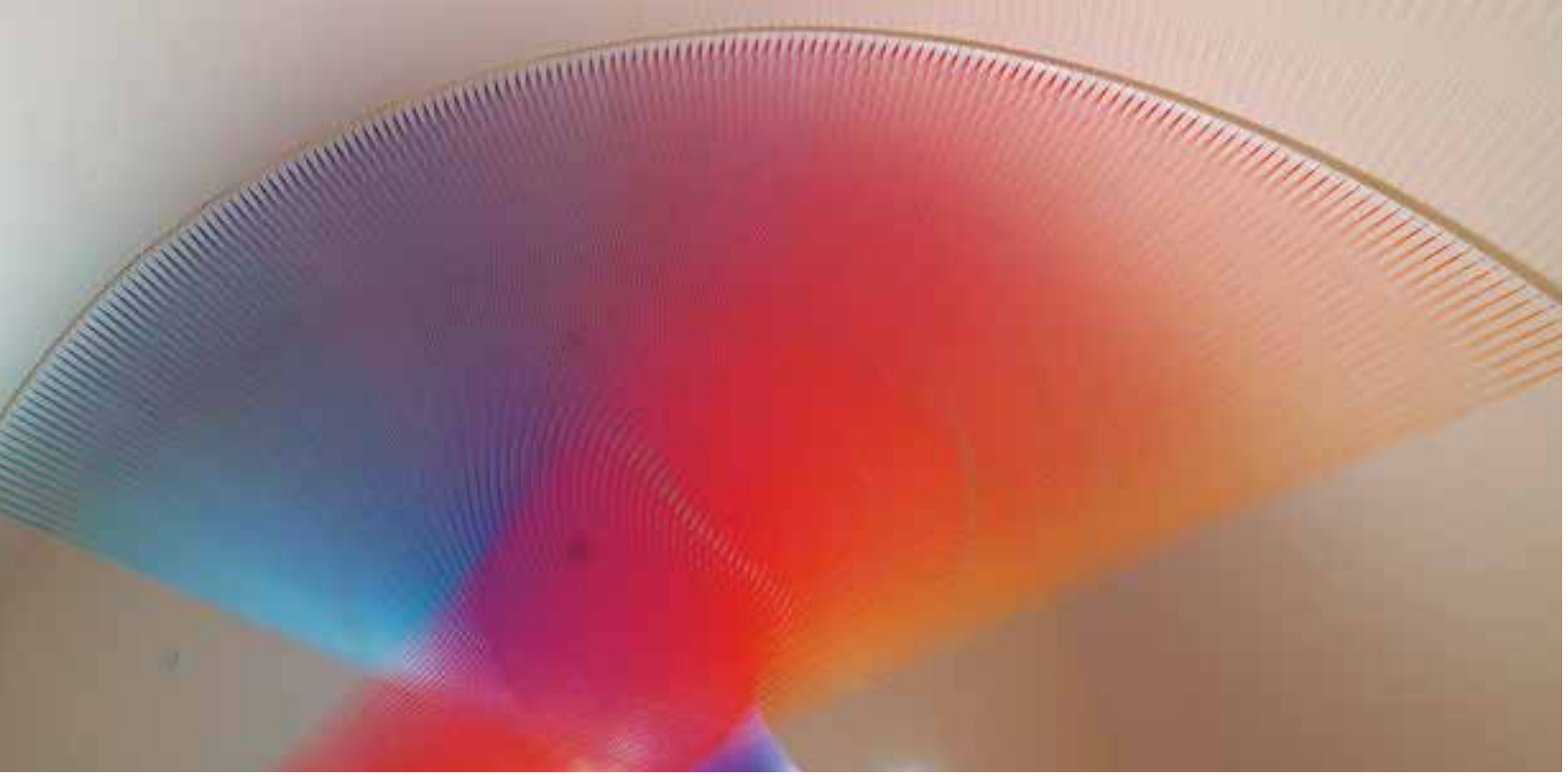
   c) Obtener la distancia del centro de la fuente al origen del sistema de referencia.

14. Si se tiene un terreno en forma triangular cuyos vértices son: $A(7,2)$, $B(4,13)$ y $C(-1,10)$ y se construye una fuente circular dentro del terreno, que sea tangente al lado $BC$ y cuyo centro tenga coordenadas $(3,10)$.

    a) Dibujar las figuras.

    b) Obtener el perímetro del terreno.

    c) Obtener el área de la fuente.



# Módulo 3

## Parábola

## Competencias genéricas[1]

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de los pasos contribuyen al alcance de un objetivo.

5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

[1]Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).

# Competencias básicas y extendidas

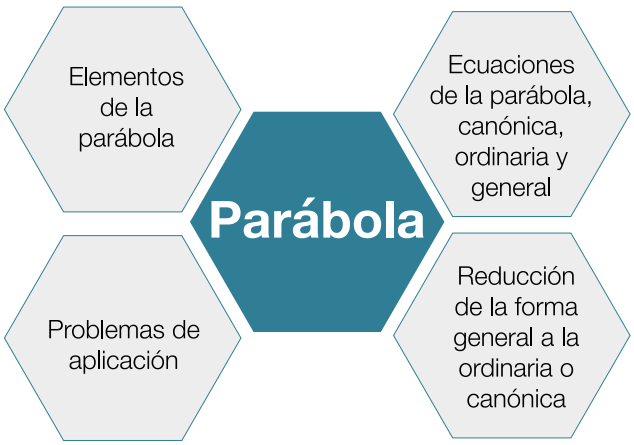
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

**Propósito**
Analizar los diferentes tipos de ecuaciones de la parábola, elementos y sus características fundamentales para resolver problemas prácticos de su entorno.

M3 Basado en competencias




# INTRODUCCIÓN

Las parábolas son útiles en diferentes situaciones de la vida cotidiana. Se puede apreciar claramente cuando lanzamos un balón bombeado o golpeamos una pelota de tenis: en la curva que describe el movimiento de la pelota puede observarse que se trata de una trayectoria parabólica. Al dibujar este desplazamiento se puede considerar esta parábola como la representación gráfica de una función que asigna a cada desplazamiento horizontal "$x$" la altura "$y$" alcanzada por la pelota (Ver figura).

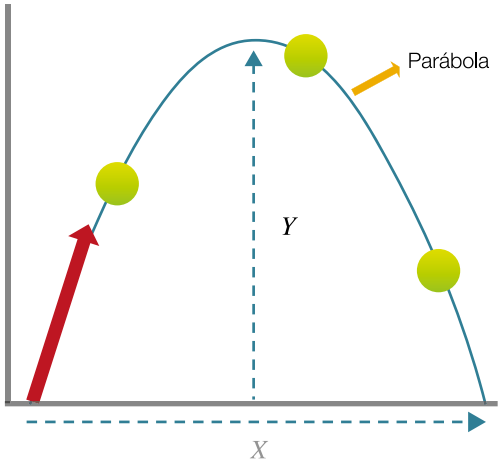



Imagen 1. Movimiento parábolico

Una vez situada la parábola en este marco, que es un sistema de coordenadas cartesianas, son visibles dos propiedades fundamentales: tiene un punto extremo, que corresponde al instante en el que la pelota alcanza la altura máxima. Este punto es el vértice de la parábola; la segunda, en la que las alturas a las que llega la pelota son las mismas en posiciones horizontales equidistantes de la abscisa del vértice. Por tanto, la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el vértice es el eje de simetría de la parábola.

## Aplicaciones de las parábolas

Las aplicaciones de las parábolas son básicamente aquellos fenómenos en donde nos interesa hacer converger o diverger un haz de luz y un sonido, principalmente. Por ejemplo, las antenas parabólicas, las lámparas sordas, los faros de los autos. Se pueden construir, por la misma propiedad de las parábolas, hornos solares. Los micrófonos de ambiente en algunos deportes también tienen forma paraboidal. Las parábolas tienen una propiedad muy interesante, si se coloca una bombilla encendida en el foco de la parábola, algunos haces de luz serán reflejados por ella y todos estos rayos serán perpendiculares a la directriz.

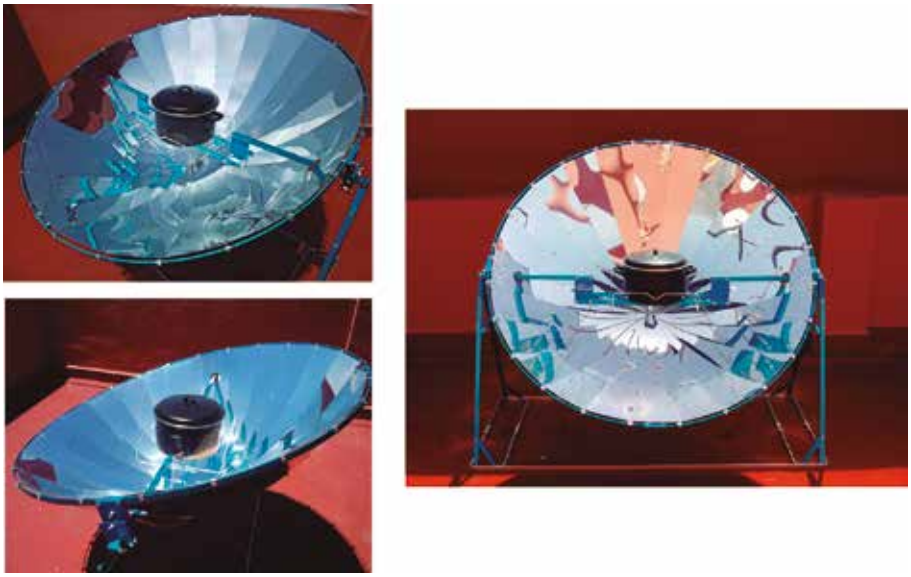


Imagen 2. Estufa solar parábolica

Esta propiedad es usada en las lámparas sordas o en los faros de los automóviles pues están formados por un paraboloide (parábola en 3 dimensiones) de espejos y una bombilla en el foco de éste.

En algunas lámparas se puede mover la bombilla del foco y provocar con ello que los haces de luz diverjan o converjan. Este principio funciona también en las antenas parabólicas: un satélite envía información a la Tierra, a través de rayos perpendiculares a la directriz por la distancia a la que se encuentra el satélite. Al reflejarse en el plato de la antena (regularmente blanca) los rayos convergen en el foco, donde se encuentra un receptor que decodifica la información. También en los telescopios se usa esta propiedad.

Otras aplicaciones de la parábola se pueden observar en las antenas parabólicas que sirven para captar las señales de televisión emitidas por un satélite. Con ella se puede ver emisoras de televisión de todas partes del mundo. Del mismo modo, la parábola se emplea para fabricar los faros de los coches.

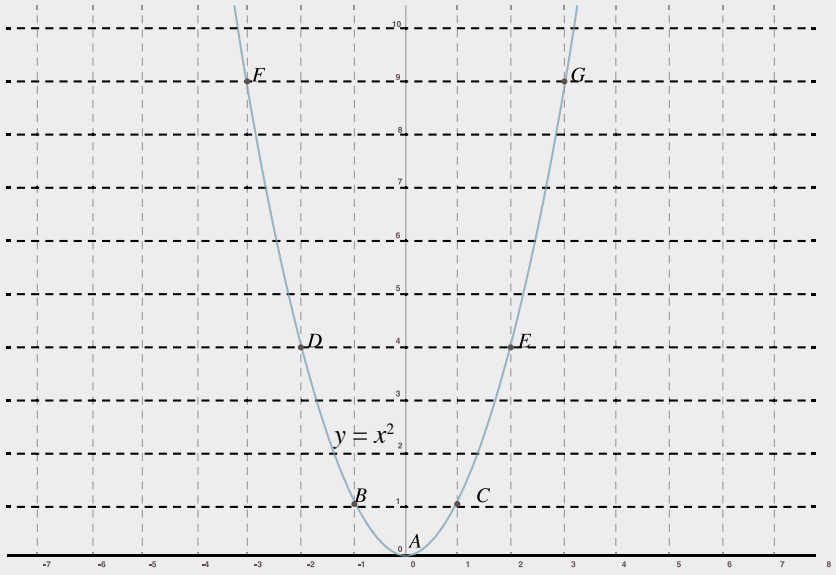
Si se grafica el comportamiento de elevar al cuadrado un número entero en el intervalo de $[-4, 4]$, representado mediante la ecuación $y = x^2$, resulta una parábola que abre hacia arriba y su vértice se ubica en el origen del sistema coordenado $V(0, 0)$.

Basado en competencias

La tabulación es:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\mp 1$ | 1 |
| $\mp 2$ | 4 |
| $\mp 3$ | 9 |
| $\mp 4$ | 16 |

La gráfica resulta una parábola que abre hacia arriba con vértice en el origen de los ejes cartesianos.




Parábola con vértice en el origen

En términos generales, **se define parábola** como la curva que se construye por la relación que existe entre sus puntos que conservan la misma distancia a un punto fijo llamado foco ($F$) y a una recta fija llamada directriz ($d$).

La elaboración de la parábola de acuerdo a la definición anterior se puede realizar de la siguiente forma:

Actividad

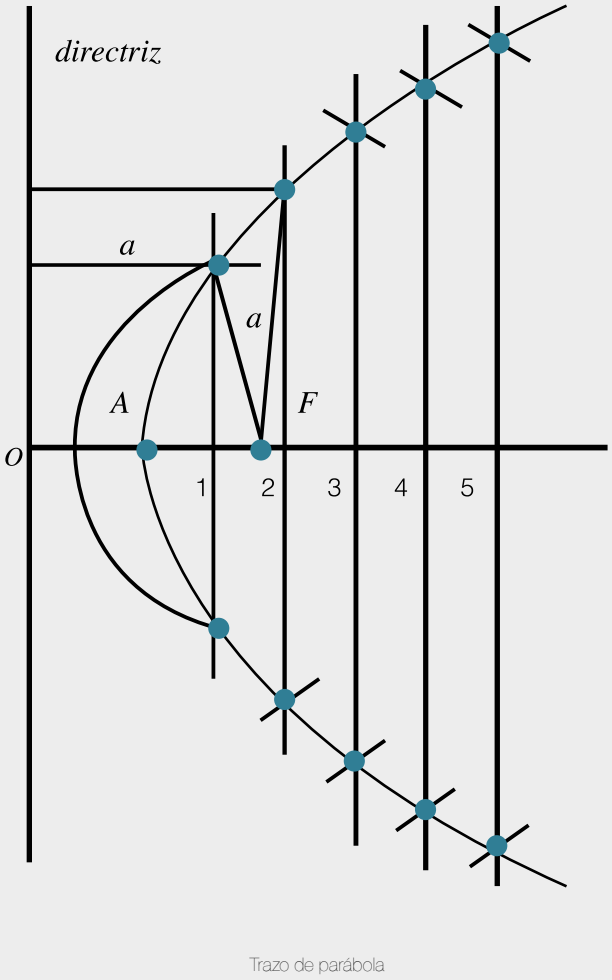
## Trazo de la parábola según definición

Se traza una recta directriz y una perpendicular que pase por el foco ($F$), donde se juntan estas dos rectas es el punto ($O$) que debe marcarse en la figura. El punto A es el vértice de la parábola y es el punto medio del segmento $OF$. A la recta $OAF$ se conoce como eje de la parábola.

Se trazan $5$ rectas paralelas a la directriz y perpendiculares al eje de la parábola. $(1, 2, 3, 4, 5)$ aumentando las distancias en un centímetro del punto $A$.

Con ayuda de un compás, traza un semicírculo con la medida del punto $O$ a la paralela $1$, o sea $O1 = a$ en la figura, marca con el compás, haciendo centro en $F$, obteniendo un corte a la paralela $1$ que divida arriba y abajo. Estos dos puntos pertenecen a la parábola; se procede en forma análoga con las distancias: $O2 = a;\quad O3 = a; O4 = a; O5 = a...$

Finalmente, se unen con una curva todos los puntos con el punto A (vértice), y se consigue como resultado la parábola.




Trazo de parábola

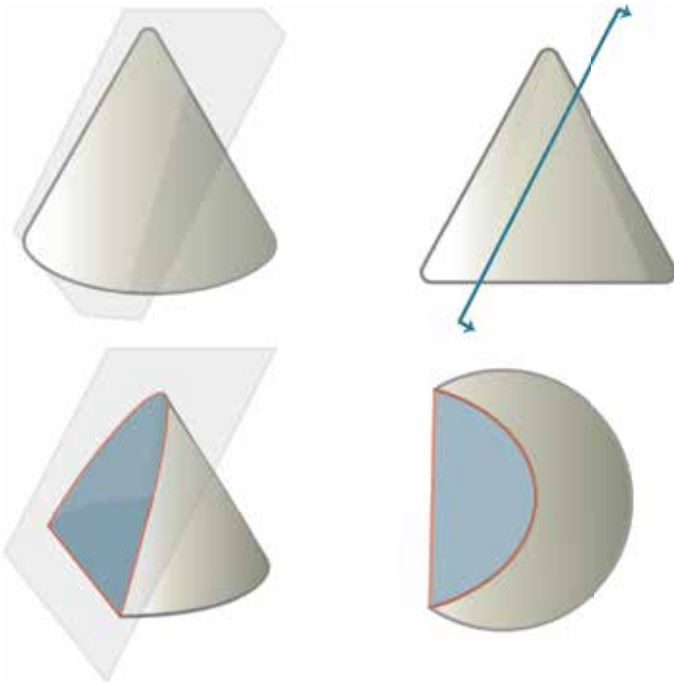
## Otras formas de elaborar una parábola:

1. En una hoja de papel albanene se dibuja un punto (preferentemente cerca del borde inferior).

   Doblar la hoja de tal manera que cualquier punto del borde inferior coincida con el punto dibujado y desdoblamos la hoja. Con la realización de este procedimiento con un punto distinto del borde inferior varias veces, se obtendrá que las marcas de los dobleces han formado una parábola.

   El punto dibujado es el foco, mientras el borde inferior de la hoja es la directriz.

2. Otra forma de encontrar una parábola es la siguiente: se debe hacer un corte a un cono de papel con un plano, la dirección del corte debe ser desde la base del cono a cualquier punto del cono. El borde de este corte será una parábola (Ver figura).



Corte a cono



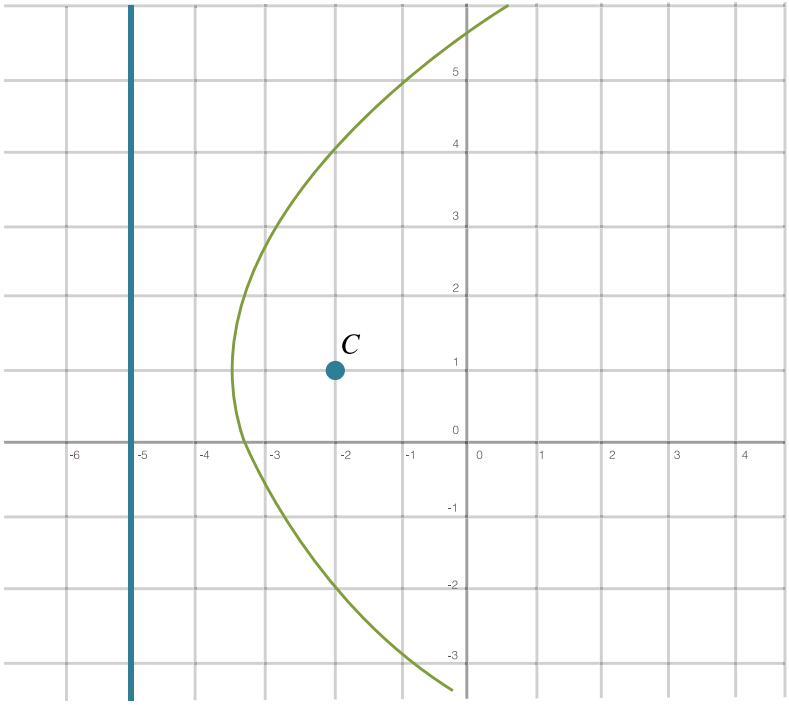
## 1.1 Elementos de la parábola

La recta que pasa por $F$ y es perpendicular a la directriz es el eje de la parábola y su eje de simetría. El punto de corte de la parábola con su eje es el vértice.

Actividad

Investiga los elementos de la parábola: Directriz, foco, eje, vértice, lado recto.

1. Escribir en la siguiente figura todos los elementos de la parábola y traza los que no estén marcados. (Tarea: reproducir esta figura con Geogebra u otro paquete graficador que conozcas y coloréalo a tu gusto. Marca los elementos de la parábola).



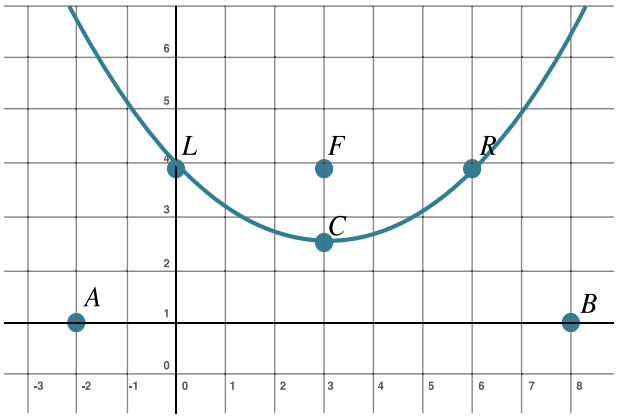

2. Con la ayuda de un compañero y un cronómetro, aventar una pelota y tratar de modelar el movimiento que hace su trayectoria desde que se avienta hasta que cae al piso. Tomar el tiempo que tarda en caer la pelota desde que se avienta hasta que cae para completar la siguiente tabla:

| Tiempo | Distancia Recorrida |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Describir en una gráfica la trayectoria de la pelota, otro compañero deberá tomar fotos de ráfaga para captar la trayectoria que describe la pelota. Responder: ¿qué relación hay entre la distancia horizontal y vertical con el tiempo?

## Elementos fundamentales de la parábola

### Caso de la parábola con eje horizontal




Parábola con eje horizontal

- Vértice ($V$)
- Foco ($F$)
- Longitud del lado recto ($LR$)
- Ecuación de la directriz

M3 Basado en competencias

# 2. Ecuaciones de la parábola

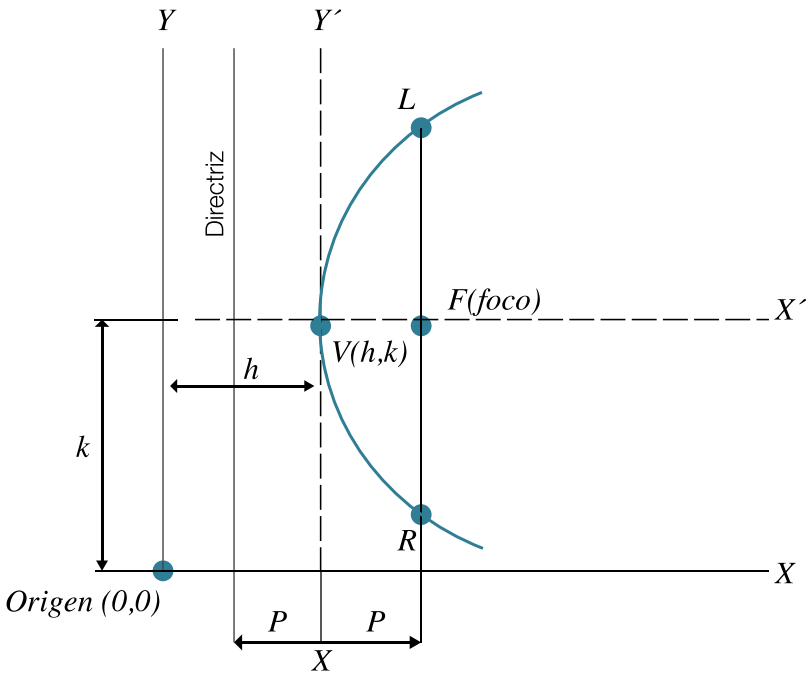
## 2.1 Forma ordinaria de la parábola

Si se considera la ecuación canónica de una parábola (de la forma $x^2 = 4py$) y se sustituye por $x$ por $(x-h)$, $y$ por $(y-k)$ entonces: $x^2 = 4py$ con base en el análisis de traslaciones de ejes se convierte en $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

De manera similar, se obtiene $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

A estas ecuaciónes de la parábola se les conoce como la **forma ordinaria** y se utilizará cuando el vértice de la parábola se encuentra fuera del origen o sea en $V(h,k)$, tanto en forma horizontal como vertical.

| Eje | Ecuación | Vértice | Foco | Directriz | Lado Recto | Eje Focal | Coordenadas del Lado Recto |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Horizontal | $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ | $V(h,k)$ | $F(h+p,k)$ | $x = h-p$ | $LR = \lvert 4p \rvert$ | $y = k$ | Se debe identificar el eje de simetría de la parábola y a partir de ahí se localizan sus coordenadas. |
| Vertical | $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ | | $F(h,k+p)$ | $y = k-p$ | | $x = h$ | |




Representación gráfica de una parábola fuera del origen

Ejemplo

Determinar la ecuación de la parábola así como su gráfica, teniendo en cuenta que su vértice está en el punto $V(-4,3)$ y su foco es $F(-1,3)$.

### Solución

Los datos indican que el vértice esta fuera del origen, por lo que la ecuación que se busca es de forma ordinaria. Dado que se tiene el mismo valor (3) en las ordenadas de $V$ y $F$, el eje de la parábola es horizontal; conocemos el vértice y el foco así que podemos conocer el valor de "$p$", mediante la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$V(-4,3)=(h,k)$$

$$p=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$p=\sqrt{(-1-(-4))^2+(3-3)^2}$$
$$p=\sqrt{(3)^2}$$
$$p=3$$

Como $p>0$, la parábola abre hacia la derecha:

Sustituyendo en la ecuación:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(y-3)^2=4(3)(x-(-4))$$
$$(y-3)^2=12(x+4)\ \textit{Ecuación en su forma ordinaria}$$

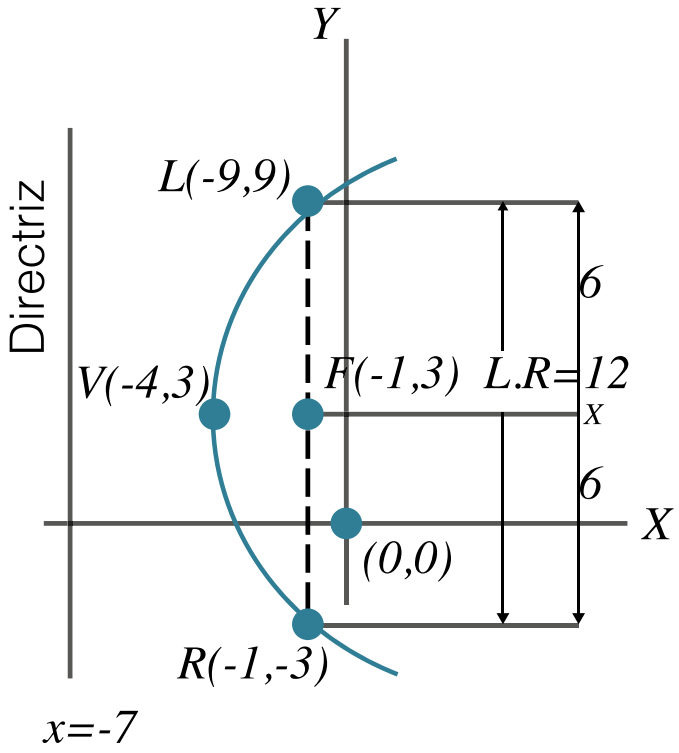
Ecuación de la directriz:

$$x = h - p$$
$$x = -4 - 3$$
$$x = -7$$

Longitud del lado recto:

$$LR = |4p| = 12$$

Para conocer las coordenadas del $LR$, a partir del eje de la parábola se cuenta la mitad del lado recto.

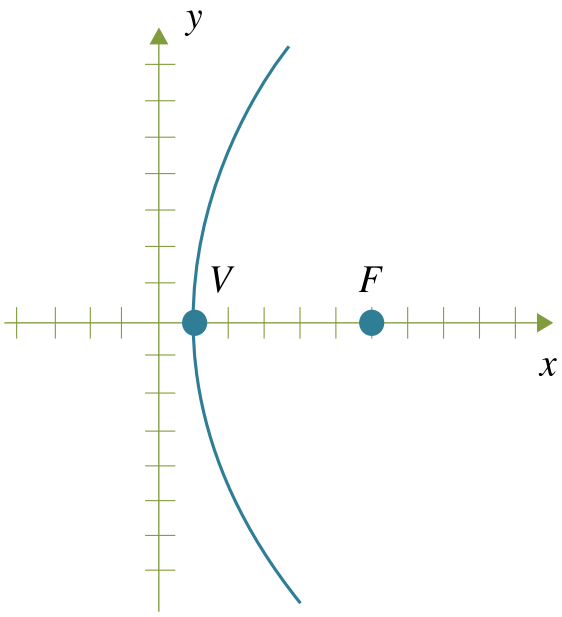



Representación gráfica

Ejercicios
Módulo 3

1. Determinar la ecuación de las siguientes parábolas:

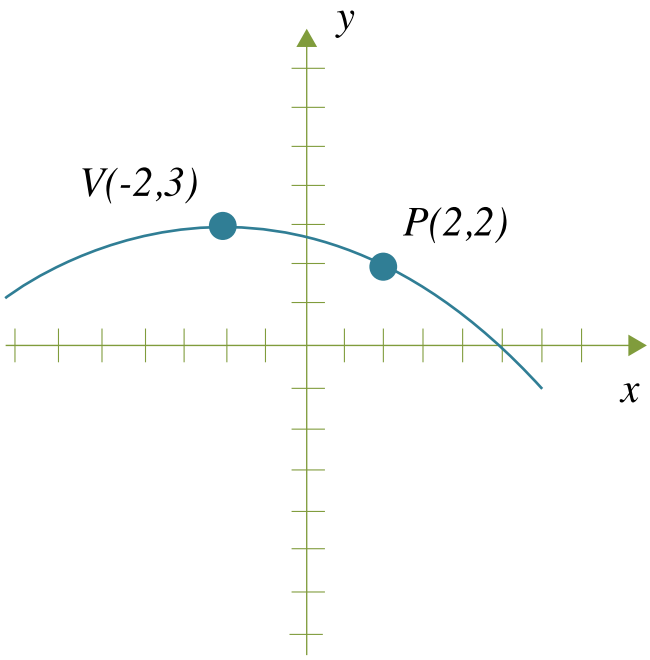
a)




R: $y^2 = 20(x-1)$

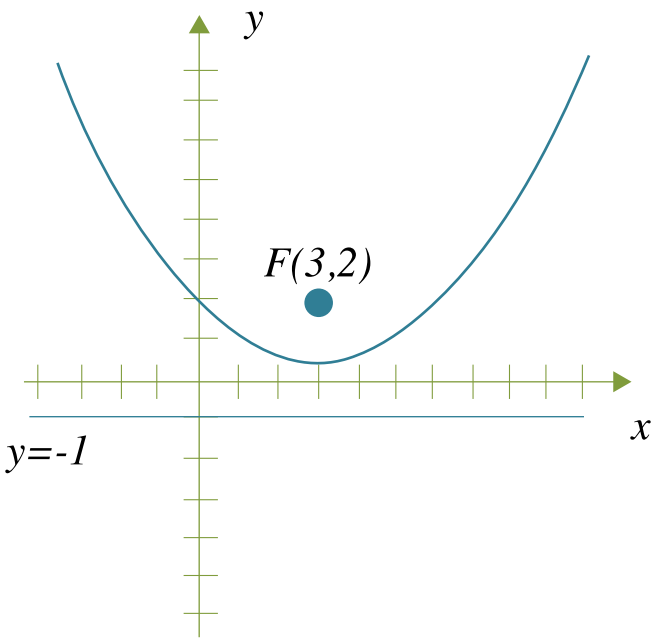
:

b)




R: $(x+2)^2 = -16(y-3)$

c)






**R:** $(x-3)^2 = 6\left(y-\frac{1}{2}\right)$

2. Trazar la gráfica de la siguiente parábola: $2x = y^2 + 8y + 22$

3. Una parábola tiene vértice $V(-4, 2)$ y directriz $y = 5$. Expresa la ecuación de la parábola en la forma ordinaria, así como su gráfica:

**R:** $(x + 4)^2 = -12(y - 2)$

4. Determinar la ecuación en la forma ordinaria de la parábola que cumpla las condiciones siguientes y trazar su gráfica:

   a) Foco $F(6, 4)$ Directriz $x = 4$

**R:** $y^2 = -12(x + 1)$

b) Vértice $V(3,-5)$ Directriz $y=-2$



R: $(y-5)^2=2(x+3)$

c) Vértice $V(-1,0)$ Foco $F(-4,0)$

d) Vértice $V(-3, 5)$, eje paralelo al eje $x$ y que pasa por el punto $p(5, 9)$

## 2.2. Forma canónica

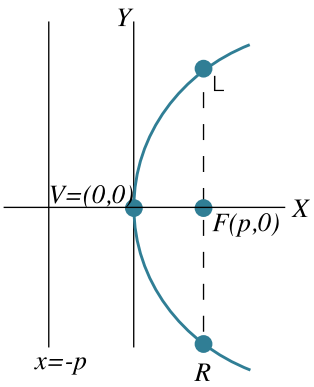
Esta forma se da cuando el vértice de la parábola coincide con el origen [intersección de los ejes coordenados] $V(0, 0)$ tanto en forma horizontal como vertical.

Se debe recordar que la ecuación de una parábola sólo cuenta con un término cuadrático, el cuál puede ser "***x***" o "***y***", que determina la abertura de la parábola que puede ser vertical u horizontal.

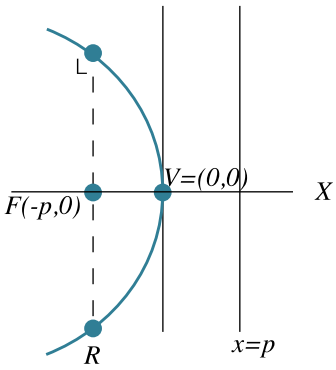
| Eje | Ecuación | Vértice | Foco | Directriz | Lado Recto | Coordenadas del Lado Recto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Horizontal | $y^2 = 4px$ | $V(0, 0)$ | $F(p, 0)$ | $x = \pm p$ | $LR = \lvert 4p \rvert$ | $L(p, 2p)$<br>$R(p, -2p)$ |
| Vertical | $x^2 = 4py$ | | $F(0, p)$ | $y = \pm p$ | | $L(-2p, p)$<br>$R(2p, p)$ |

Gráficas

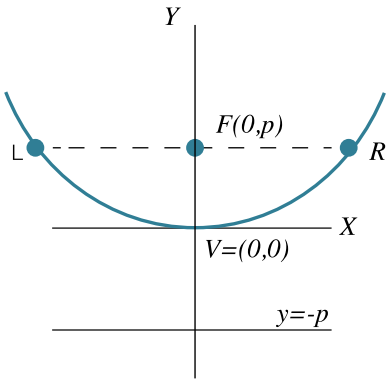
(horizontal)
$Si\ P > 0$



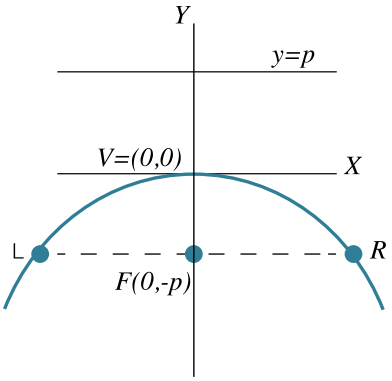

(horizontal)
$Si\ P < 0$




(vertical)
$Si\ P > 0$




(vertical)
$Si\ P < 0$




## Gráfica de la parábola

Como se ha observado, la gráfica de la parábola puede abrir hacia arriba, hacia abajo, a la derecha o a la izquierda, de acuerdo con el valor del parámetro $p$. Las características que presentan las gráficas dependen de su análisis.

**Ejemplo**

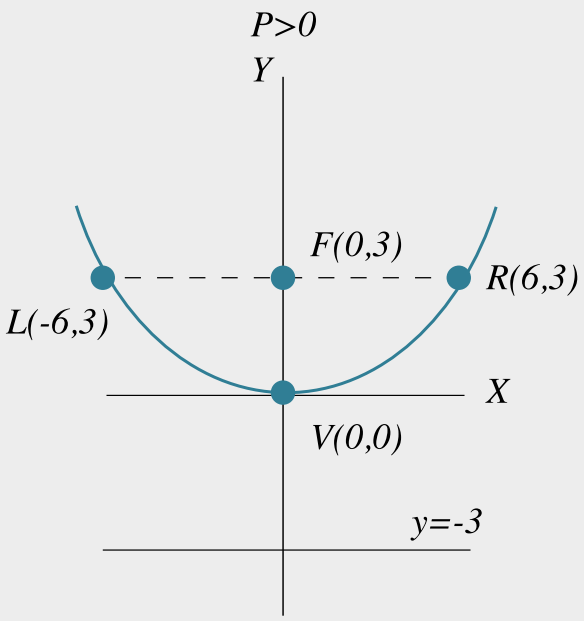
Determinar los elementos y gráfica de una parábola con vértice el origen y eje vertical y que pasa por el punto $p(6,3)$.

**Solución**

El vértice está en el origen $V(0,0)$ y punto $p(6,3)$ pertenece a la parábola y debe de satisfacer a la ecuación $x^2 = 4py$ (eje vertical).

Con ayuda de la formula canónica en el eje vertical y de todos sus elementos de la tabla *A* se tiene:

Representación gráfica




$p(6,3)=(x,y)$ se sustituyen en la ecuación:

$x=6$
$y=3$

Se sustituyen y se despeja a "$p$".

$$(6)^2=4p(3)$$
$$36=12p$$
$$\frac{36}{12}=p$$
$$p=3$$

Como $p>0$ positivo, la parábola abre hacia arriba

los elementos son:

*Ecuación en forma canónica* $x^2=4(3)y \Rightarrow x^2=12y$

*foco* $F(0,p)\Rightarrow(0,3)$

*Ecuación de la directriz* $y=-p \Rightarrow y=-3$

*Longitud del lado recto* $LR=|4p|=4(3)=12$

*Coordenadas del lado recto* $L(2p,p)\Rightarrow(6,3)$

$R(-2p,p)\Rightarrow(-6,3)$

1. Determinar el vértice, foco, ecuación de la directriz, lado recto, así como la representación gráfica de las siguientes parábolas:

   a) $8y=x^2$

Ejercicios
Módulo 3

R: $V(0,0)$; $F(0,2)$; $y=-2$, $LR=8$.

b) $2y^2 = -3x$



**R:** $V(0,0);\ F(-\frac{3}{8},0);\ x=\frac{3}{8},\ LR=\frac{3}{8}$.

2. Determinar la ecuación y gráfica de la parábola, cuyo vértice coincide con el origen, que abre hacia la derecha y pasa por el punto $p(7,-3)$.

**R:** $x=\frac{7}{9}y^2$

## 2.3 Forma general de la parábola

Al desarrollar el binomio al cuadrado de la ecuación en forma ordinaria $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, en el otro miembro se multiplica usando la propiedad distributiva, se trasponen todos los términos al primer miembro de la ecuación, y se obtiene la ecuación de la parábola en forma general: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Analogamente para $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ se obtiene $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

## 2.4 Reducción de la forma general a la forma ordinaria

Para obtener la forma ordinaria a partir de la forma general de una parábola, se procede con el método de completar el trinomio cuadrado perfecto por un lado, y factorizando en el otro miembro. Esto se identifica cuando se tienen variables cuadráticas y lineales en la misma ecuación, y se desea obtener los elementos de una parábola a través de su forma ordinaria.

| Eje | Ecuación | Ecuación Ordinaria | $p$ | $h$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Horizontal | $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ | $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ | $p = -\frac{D}{4C}$ | $h = \frac{E^2 - 4CF}{4CD}$ | $k = -\frac{E}{2C}$ |
| Vertical | $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ | $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ | $p = -\frac{E}{4A}$ | $h = -\frac{D}{2A}$ | $k = \frac{D^2 - 4AF}{4AE}$ |

Procedimiento para reducir la forma general a la ordinaria:

1. Se identifica en qué eje se localiza la forma general: si tiene $y^2$ es horizontal, mientras que si cuenta con $x^2$ es vertical.

2. Se observa si la ecuación general está acomodada: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$. En caso de no ser así es necesario acomodarla.

3. Ya que se tiene identificada la ecuación y el eje se procede a identificar el valor de cada coeficiente ($A$, $C$, $D$, $E$, $F$) con su respectivo signo teniendo estos valores se sustituyen en las fórmulas de $p$, $h$ y $k$ de la tabla anterior, así como en la forma ordinaria correspondiente.

4. Con los respectivos valores de $p$, $h$ y $k$, obtenidos se grafica.

Analizando las posibilidades de las ecuaciones: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$. Si se suman ambas tenemos $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que es una ecuación de segundo grado con dos variables y sin término ($xy$).

Caso 1: si $A = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola con eje horizontal al quedar reducida: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Caso 2: si $A = 0$, $C \neq 0$, $D = 0$, la ecuación se reduce a una ecuación cuadrática $Cy^2 + Ey + F = 0$ con una variable y representando, según sus raíces:

a) reales diferentes → dos rectas diferentes paralelas al eje $x$

b) reales e iguales → dos rectas coincidentes paralelas al eje $x$

c) complejas → ningún lugar geométrico en los números reales

Caso 3: si $A \neq 0$, $C = 0$, $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola con eje vertical al quedar reducida: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Caso 4: si $A \neq 0$, $C = 0$, $E = 0$, la ecuación se reduce a una ecuación cuadrática $Ax^2 + Dx + F = 0$ con una sola variable, representando, según sus raíces

a) reales diferentes → dos rectas diferentes paralelas al eje $y$

b) reales e iguales → dos rectas coincidentes paralelas al eje $y$

c) complejas → ningún lugar geométrico en los números reales

M3 Basado en competencias

**Ejemplo**

Determinar la forma ordinaria de la parábola dada en forma general $4x^2 + 12x + 48y - 159 = 0$ y trazar su gráfica con todos sus elementos.

**Solución**

Se utiliza el procedimiento para reducir la forma general a la forma ordinaria:

$$4x^2 + 12x + 48y - 159 = 0 \begin{cases} A = 4 \\ D = 12 \\ E = 48 \\ F = -159 \end{cases}$$

Se puede observar que la ecuación tiene a la variable $x^2$, por lo que se localiza en el eje vertical la parábola, utilizando a las fórmulas de la tabla y, sustituyendo a las variables, se obtiene lo siguiente:

$$p = -\frac{E}{4A} \qquad h = -\frac{D}{2A} \qquad k = \frac{D^2 - 4AF}{4AE}$$

$$p = -\frac{48}{4(4)} = -3 \qquad h = -\frac{12}{2(4)} = -\frac{3}{2} \qquad k = \frac{12^2 - 4(4)(-159)}{4(4)(48)} = \frac{7}{2}$$

Como $p < 0$ la parábola abre hacia abajo.

A continuación, se presentan los datos que permiten obtener sus elementos y gráfica:

Eje Vertical

Ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 = 4(-3)\left(y+\frac{7}{2}\right)$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = -12\left(y+\frac{7}{2}\right)$

Vértice $V\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right) \Rightarrow (h,k)$

Directriz

$y = \frac{7}{2} - (-3) \Rightarrow -\frac{1}{2}$

Lado Recto

$LR = |4p| \Rightarrow 12$

Eje Focal

$x = h$

$x = -\frac{3}{2}$

Foco

$F(h, k+p)$

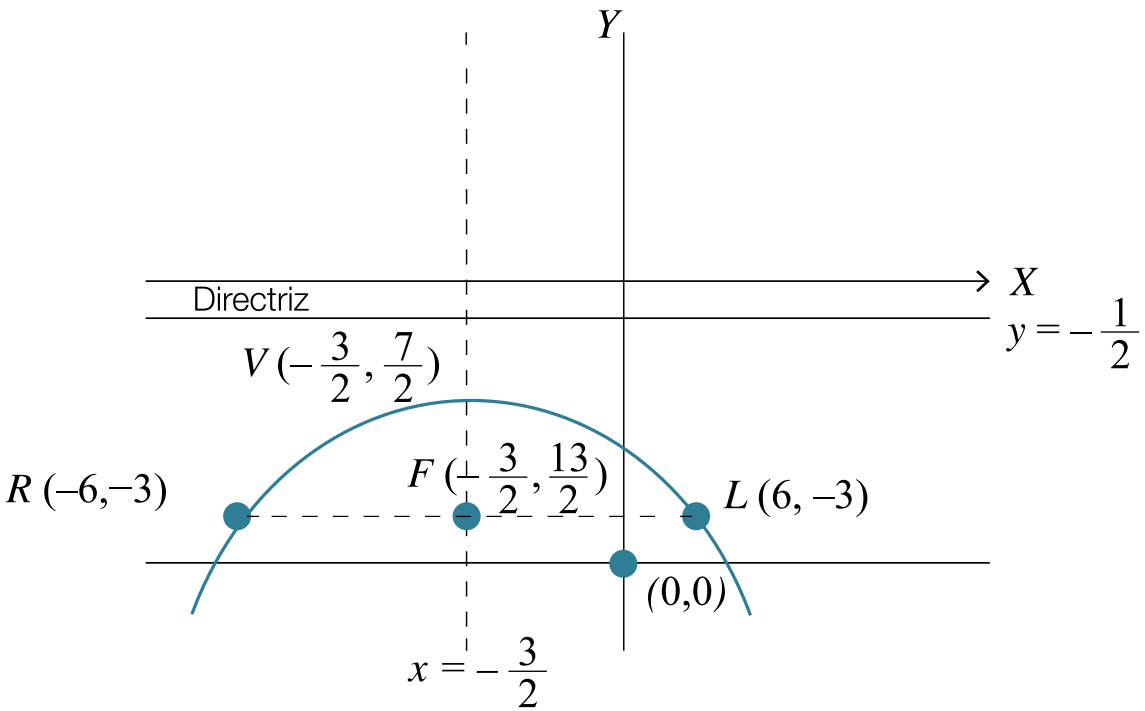
$F\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}-3\right) \Rightarrow \left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

Coordenadas del Lado Recto

$L(6,-3)$

$R(-6,-3)$

Representación gráfica



Ejemplo

Determinar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al punto fijo $F(4, 3)$ sea igual a su distancia a la recta $x - 2 = 0$.

**Solución**

La distancia entre $p$ y $F$ está dada por:

$$PF = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$$

Para determinar la distancia de $p$ a la recta, trazamos la recta y un punto de abscisa mayor a 2.

La condición que se debe cumplir es:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = x - 2$$
$$\left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = (x-2)^2$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2$$
$$(y-3)^2 = \underbrace{(x-2)^2 - (x-4)^2}_{\textit{Diferencia de cuadrados}}$$
$$(y-3)^2 = [(x-2) + (x-4)][(x-2) - (x-4)]$$

$$y^2 - 6y + 9 = [x - 2 + x - 4][x - 2 - (x-4)]$$
$$y^2 - 6y + 9 = (2x - 6)[x - 2 - x + 4]$$
$$y^2 - 6y + 9 = (2x - 6)(2)$$
$$y^2 - 6y + 9 = 4x - 12$$
$$y^2 - 4x - 6y + 21 = 0$$

Es la ecución de una parábola horizontal en forma general.

Ejercicio
Módulo 3

Determinar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al punto fijo $F(3, -2)$ sea igual a su distancia a la recta $y = 0$.

M3 Basado en competencias

Ejemplo

Determinar los puntos de intersección entre el lugar geométrico de ecuación $y^2 - 4x - 2y + 9 = 0$ y la recta de ecuación $2x - y - 7 = 0$.

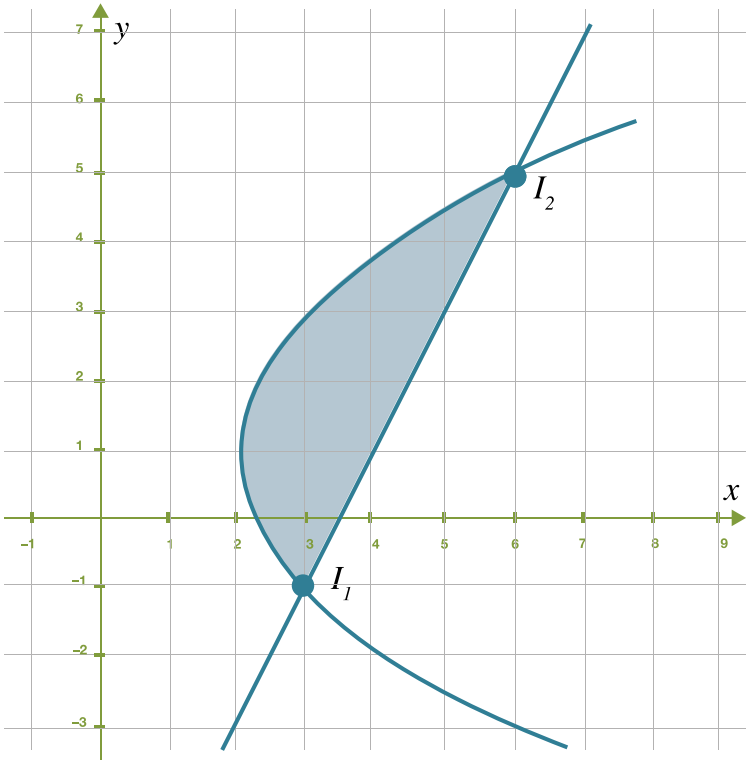
## Solución

Por el método de sustitución se cuenta con la ecuación de la recta corresponde a: $y = 2x - 7$.

Sustituyendo en la ecuación del lugar geométrico:

$$(2x-7)^2 - 4x - 2(2x-7) + 9 = 0$$
$$4x^2 - 28x + 49 - 4x - 4x + 14 + 9 = 0$$
$$4x^2 - 36x + 72 = 0$$
$$4(x^2 - 9x + 18) = 0$$
$$x^2 - 9x + 18 = 0$$
$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$
$$x_1 = \frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3,\ y = 2(3) - 7 = 6 - 7 = -1;\ I_1(3,-1)$$
$$x_2 = \frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6,\ y = 2(6) - 7 = 12 - 7 = 5;\ I_2(6,5).$$

La gráfica siguiente muestra los resultados:



Ejercicio
Módulo 3

Determinar los puntos de intersección entre la parábola cuya ecuación es $x^2 - 2x - y + 2 = 0$ y la recta con ecuación $y = x + 2$. Trazar ambas ecuaciones en el mismo plano.

M3
Basado en competencias

R: $P_1(0, 2)$ y $P_2(3, 5)$

Realice de la representación gráfica $x^2 - 6x + 12y + 21 = 0$ y los intervalos en que crece y decrece.

**R:** $V(3,-1)$, $p = -3$ abre hacia abajo.

Ejemplo

Determinar la ecuación en forma ordinaria, los elementos y traza la gráfica de la parábola cuya ecuación general es $x^2 + 2x - 4y - 11 = 0$.

**Solución**

Utilizando ecuación general:

$$x^2 + 2x - 4y - 11 = 0$$

Despejando, agrupando términos, completando el binomio y factorizando:

$$x^2 + 2x = 4y + 11$$
$$x^2 + 2x + 1 = 4y + 12$$
$$(x+1)^2 = 4(y+3)$$

Obteniendo los valores $h$ y $k$:

$$h = 1$$
$$k = -3$$
$$V(-1, -3)$$

Obteniendo el valor $p$:

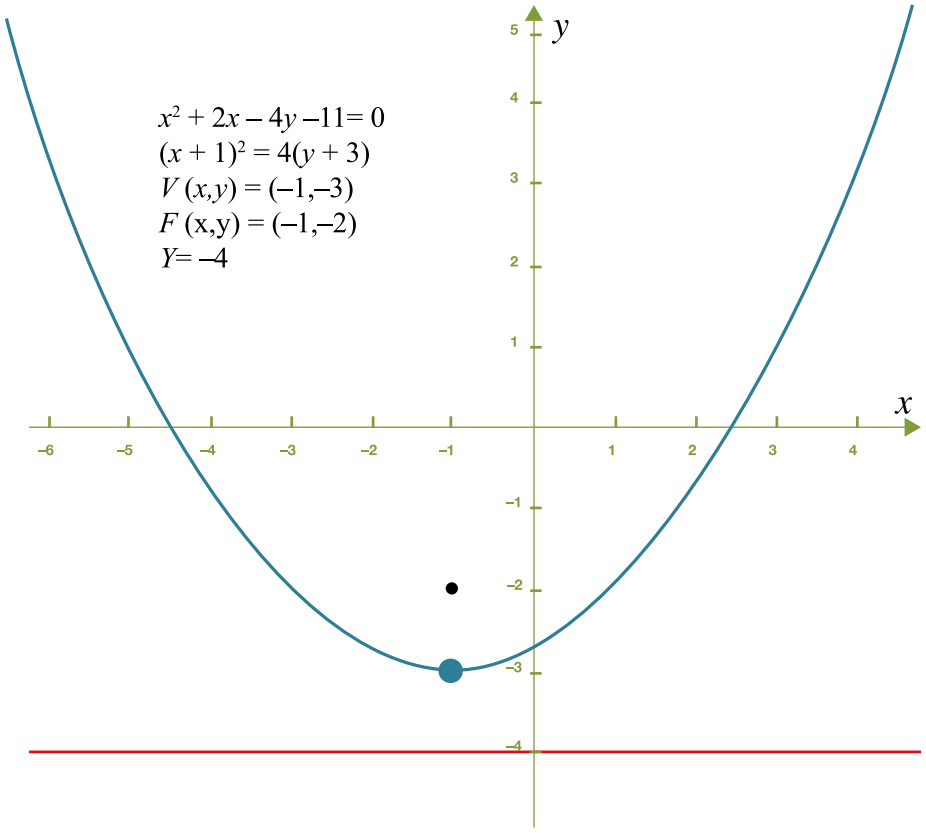
$$4p = 4$$
$$p = 1$$

Obteniendo el foco:

$$F(h, k+p)$$
$$F(-1, -2)$$

Obteniendo la directriz:

$$y - k + p = 0$$
$$y - (-3) + 1 = 0$$
$$y + 3 + 1 = 0$$
$$y = -4$$




Nitidez en la gráfica

Determinar la ecuación ordinaria, los elementos y trazar la gráfica de la parábola cuya ecuación general es: $x^2 + 10x + 12y + 1 = 0$.

Ejercicio
Módulo 3

**R:** $(x + 5)^2 = -12(y - 2)$
V (-5, 2)
F (-5, –1)
y = 5
L R = 12

Ejemplo

Determinar la ecuación en forma ordinaria, los elementos y trazar la gráfica de la parábola cuya ecuación en forma general es $y^2 - 20x + 4y + 64 = 0$.

**Solución**

$$y^2 - 20x + 4y - 64 = 0$$
$$y^2 + 4y = 20x - 64$$

Despejando, agrupando términos, complementando el binomio y factorizando:

$$y^2 + 4y + 4 = 20x - 60$$
$$(y+2)^2 = 20(x-3)$$

Obteniendo valores de $h$ y $k$:

$$h = 3$$
$$k = -2$$

Obteniendo el vértice:

$$V(3,-2)$$

Obteniendo el valor de $p$:

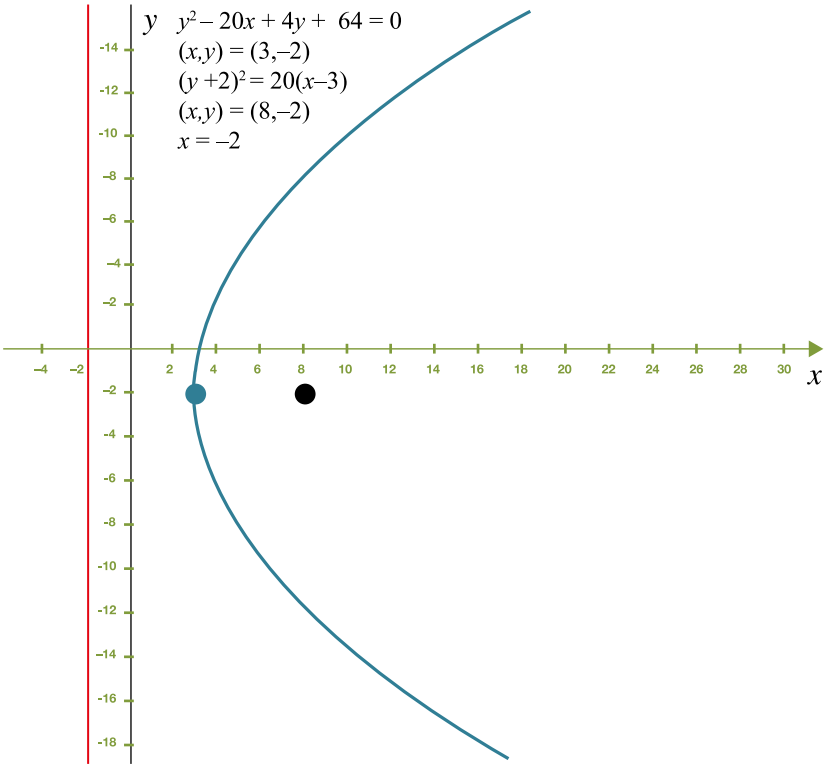
$$4p = 20$$
$$p = 5$$

Obteniendo el foco:

$$F(h, k+p)$$
$$F(3,3)$$

Obteniendo la directriz:

$$x - 3 + 5 = 0$$
$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$




Determinar la ecuación en forma ordinaria, los elementos y trazar la gráfica de la parábola cuya ecuación general es $y^2 - 6y + 4x + 29 = 0$.

Ejercicio
Módulo 3

**R:** $(y-3)^2 = -4(x+5)$
V (-5, 3)
F (-6, 3)
x = -4
L R = 4

## 3. Determinación de la ecuación de una parábola sujeta a condiciones dadas.

Una carretera atraviesa un cerro mediante de un túnel con forma de arco parabólico, que tiene 4 *m.*de claro y 6 *m.* de altura. ¿Cuál es la altura máxima que puede tener un vehículo de transporte de 2 *m.* de ancho para pasar sin atorarse dentro del túnel?

### Solución

La ecuación que representa la solución es $x^2 = -4py$. Por lo que se conoce, el punto (2,6) y se puede sustituye en la ecuación para obtener el valor de $p$ $2^2 = -4p(6)$, $\therefore$ $p = -\frac{1}{6}$.

Se sustituye en la ecuación: $x^2 = -4py$

Obteniendo: $x^2 = -2/3\ y$, si $x = 1$

Ahora si $x = 1$: $1^2 = -2/3y$

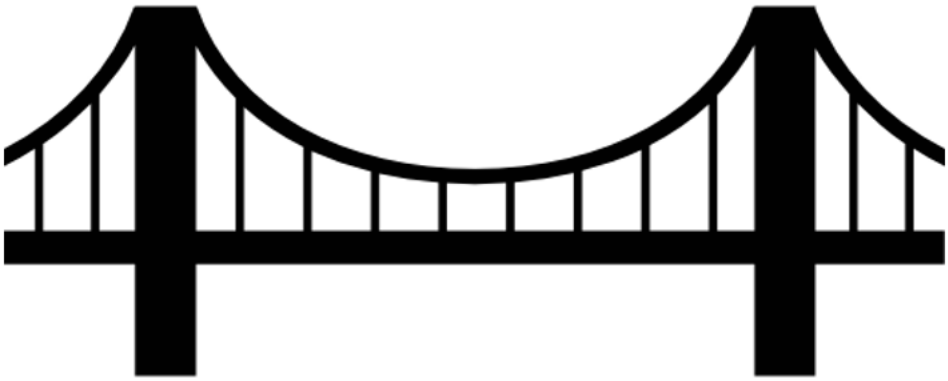
Entonces: $y = -1.5$ y $h = 6 - 1.5 = 4.5\ m$

### Conclusión

El transporte debe tener 4.5 *m.* de altura máxima para pasar dentro del tunel.

Ejercicio
Módulo 3

Los tirantes de un puente colgante tienen forma de arco parabólico. Los extremos de cable alcanzan una altura de 20 *m.* sobre el puente y se hallan a 300 *m.* de distancia entre sí. El punto más bajo del cable queda suspendido a 5 *m.* de altura sobre el puente. A 100 *m.* de distancia de ese punto, ¿qué tan alto está el cable sobre el puente?



**R:** 11.6 *m.*

Ejercicios

# Ejercicios adicionales

1. En cada uno de los siguientes ejercicios obtenga la ecuación en forma general de la parábola, así como su representación gráfica:

   a) $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

   b) $(x-6)^2 = 12(y-1)$

   c) $y^2 = -12(x+1)$

   d) $(y-5)^2 = 2(x+3)$

2. En cada uno de los siguientes ejercicios, reducir la ecuación en forma general a su forma ordinaria y localizar sus elementos para poder trazar su gráfica:

   a) $x^2 + 6x - 8y + 25 = 0$

   R: $(x+3)^2 = 8(y-2), V(-3,2), F(-3,4), LR = 8, y = 0$

   b) $x^2 - 4x + 12y + 52 = 0$

   R: $(x-2)^2 = -12(y+4), V(2,-4), F(2,-7), LR = 12, y = -1$

   c) $y^2 - x - 2y + 4 = 0$

   R: $(y-1)^2 = (x-3), V(3,1), F(\frac{3}{14},1), LR = 1, x = \frac{1}{4}$

   d) $2x^2 - x + 8y + 4 = 0$

   R: $(y+2)^2 = -\frac{1}{2}(x-4), V(4,-2), F\left(\frac{31}{8},-2\right), LR = \frac{1}{2}, x = \frac{33}{8}$

3. Determinar la ecuación de una parábola cuyo eje sea paralelo al eje $x$ y que pase por los puntos $(3,3), (6,5)$ y $(6,-3)$.

   R: $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$

4. Determinar la ecuación de una parábola de eje vertical y que pase por los puntos $(4,5),(-2,11)$ y $(-4,21)$.

R: $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

5. Determinar la ecuación de una parábola cuyo vértice esté sobre la recta $2y - 3x = 0$ con eje paralelo al de coordenadas $x$, y que pase por los puntos $(3,5)$ y $(6,-1)$.

R: $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$

$11y^2 - 98y - 108x + 539 = 0$

6. Determinar la ecuación de la parábola que tiene de foco el punto $(-2,-1)$ y cuyo lado recto es el segmento entre los puntos $(-2,2)$ y $(-2,4)$.

R: $y^2 + 2y - 6x - 20 = 0,\ y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$

7. Determinar la ecuación de la parábola de vértice $(-2,3)$ y foco $(1,3)$.

R: $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$

8. Dadas las siguientes parábolas, calcular las coordenadas del vértice, foco, longitud del lado recto y la ecuación de la directriz. Graficar.

a) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$

R: $V(2,2)$

$F\left(\frac{1}{2},2\right)$

$LR = 6$

Directriz $x - \frac{7}{2} = 0$.

b) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

R: $V\left(\frac{3}{2},-\frac{7}{4}\right)$

$F\left(\frac{3}{2},-\frac{4}{3}\right)$

$LR = 513$

Directriz.

c) $3x^2 - 6x - 24y - 45 = 0$

**R:** $V(1,-2)$

$F(1,0)$

$LR = 8$

Directriz $x + 4 = 0$.

d) $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$

**R:** $V\left(\frac{3}{2},2\right)$

$F(3,2)$

$LR = 6$

Directriz $x = 0$.



Elejir la respuesta correcta de los siguientes ejercicios.

9. El eje de las parábolas de ecuación general de la forma $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es:

   a) Una recta vertical
   b) Una recta horizontal
   c) El eje $x$ necesariamente
   d) El eje $y$ necesariamente
   e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

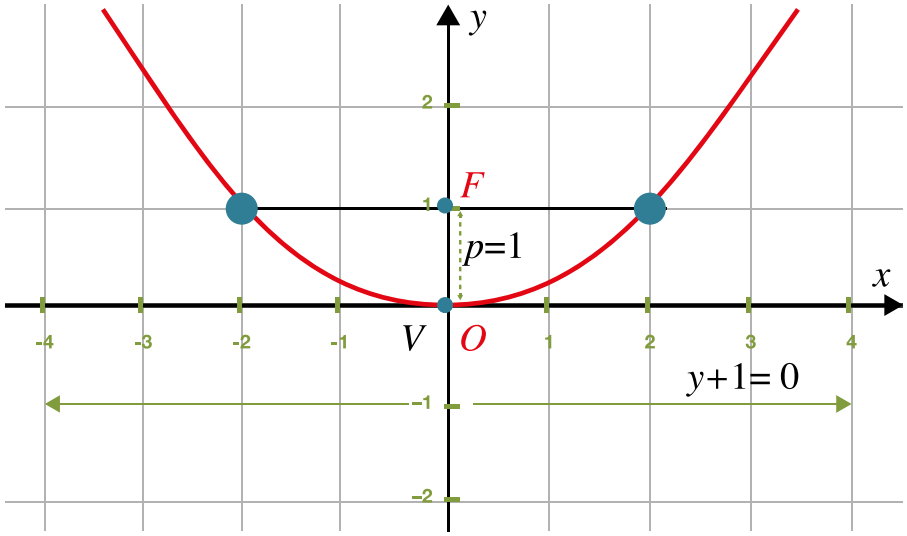
   **R:** a

10. En cualquier parábola, la cuerda que es perpendicular al eje y que pasa por el foco se denomina:

    a) directriz
    b) eje focal
    c) lado recto
    d) eje transversal
    e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

    **R:** c

11. La ecuación de la parábola de la figura es:




a) $x^2 = 4y$
b) $y^2 = 4x$
c) $x^2 = -4y$
d) $y^2 = -4x$
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**R:** a

12. La medida, en valor absoluto, del lado recto de la parábola de ecuación $y^2 = -20x$ es:

a) 10
b) 4
c) 5
d) 20
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**R:** d

13. Determina el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -8(x+4)$.

a) $V(4,0), F(6,0), x-2=0$
b) $V(-4,0), F(-6,0), x+2=0$
c) $V(0,4), F(0,6), y-2=0$
d) $V(0,-4), F(0,-6), y+2=0$
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**R:** b

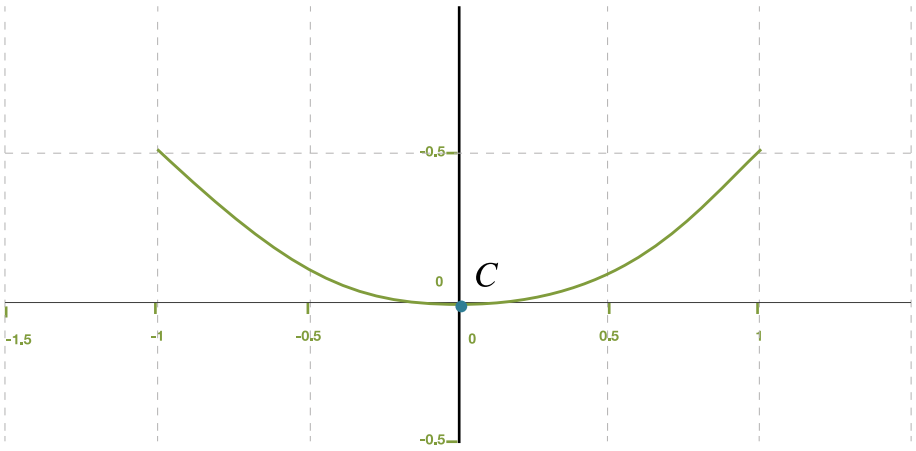
Relacionar ambas columnas y escribir dentro del paréntesis la letra que corresponda a cada una de las definiciones:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia la derecha y tiene vértice en el origen. | A | $y^2 = -4p(x-h)$ |
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia arriba y tiene vértice en el origen. | B | $(x-h)^2 = -4py$ |
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia la derecha y tiene vértice en $V(0,k)$ | C | $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ |
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia la izquierda y tiene vértice en $V(h,0)$ | D | $y^2 = 4px$ |
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia la izquierda y tiene vértice en $V(0,0)$ | E | $x^2 = 4py$ |
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia abajo y tiene vértice en $V(h,0)$ | F | $(y-k)^2 = -4px$ |
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia la derecha y tiene vértice en $V(0,k))$ | G | $(y-k)^2 = 4px$ |
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia la izquierda y tiene vértice en $V(0,k)$ | H | $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ |
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia arriba y tiene vértice en $V(h,k)$ | I | $y^2 = -4px$ |
| ( ) | Ecuación de la parábola que abre hacia la izquierda y tiene vértice en $V(h,k)$ | J | $y^2 = 4p(x-h)$ |

## Problemas de aplicación

1. Algunos insectos saltan describiendo una trayectoria parabólica. Si un grillo da un salto de 60 *cm.* de longitud y la altura máxima del salto se calcula de 30 *cm.*, determinar la ecuación en forma ordinaria que describe esta trayectoria y realiza la gráfica.

2. Una antena parabólica tiene la forma de la figura siguiente en su sección central, obtener la posición del foco para una mejor recepción.



3. Medir a escala la figura de la antena parabólica y trazar una sección central de ella con el eje vertical. Obtener su ecuación en forma canónica y todos sus elementos.

# Módulo 4

## Elipse e hipérbola

## Competencias genéricas[1]

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de los pasos contribuyen al alcance de un objetivo.

5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

[1]Competencias genéricas y atributos definidos en el Marco Curricular Común (MCC).

# Competencias básicas y extendidas

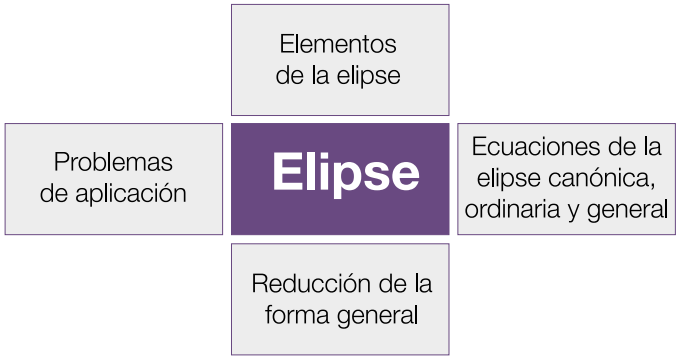
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

**Propósito**
Identificar tanto a la elipse como a la hipérbola con una ecuación determinada junto a sus aplicaciones; conocer los elementos que la conforman y la relación que tiene con otras curvas.

M4
Basado en competencias

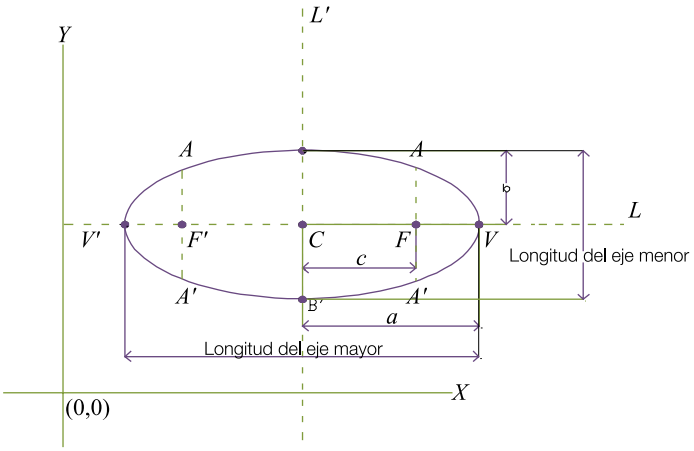



# INTRODUCCIÓN

## 1. Definición de la elipse

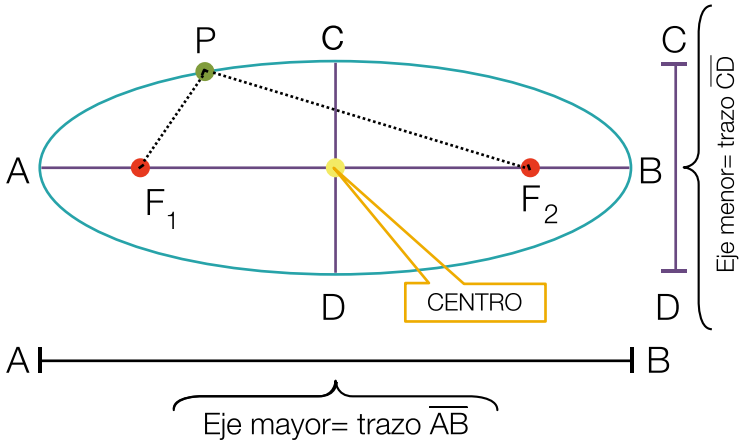
Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se desplaza en el plano de tal manera que las sumas de sus distancias a dos puntos fijos son siempre igual a una constante mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos se llaman **focos** de la elipse.

## 1.1 Elemento fundamentales de la elipse.




$F$ y $F'$, focos
$V$ y $V'$, vértices
$C$, centro
$\overline{VV'}$ , eje mayor
$AA'$, lado recto
$\overline{BB'}$ eje menor
$L'$ eje normal
$L$, eje focal
$B$ y $B'$ extremos del eje menor

## 1.2 Ejemplos de la elipse




La primera característica a mencionar está dada con las órbitas planetarias. Éstas son elípticas con relación al sol en uno de los focos. Si se observan las animaciones anteriores y suponiendo que el punto $\boldsymbol{P}$ es un planeta y $\boldsymbol{F_1}$ es el sol, es evidente que la velocidad del planeta más cercano (perihelio) es mayor que cuando se encuentra en el punto más alejado.

La elipse posee propiedades de reflexión similares a la de la parábola. En este caso, por ejemplo, si se coloca un emisor de ondas en un foco, éstas se reflejan en las paredes de la elipse y convergen con el otro foco.

En medicina, se emplea un aparato llamado “litotriptor” cuya función es desintegrar “piedras” renales por medio de ondas intra-acuáticas de choque. Para su funcionamiento, se coloca un medio elipsoide lleno de agua pegado al cuerpo del paciente; en el foco de esta parte del elipsoide se coloca un generador de ondas; el foco de la otra parte del elipsoide debe localizarse en los “cálculos” y de esta manera, al reflejarse las ondas en la superficie exterior del elipsoide, todas convergerán en ellos y los desintegra.

Otro ejemplo son los gabinetes de los secretos, que son estructuras cuyos techos se construyen de manera elipsoidal y una de sus características es que en su interior el sonido puede viajar a través de las elipses. Si un locutor emite un mensaje desde un foco hacia un interlocutor que se encuentra en cualquier otro foco de la bóveda éste podrá escucharle, pero no si se ubica en cualquier lugar entre ambos focos de transferencia. Se puede encontrar una bóveda de los secretos en el Desierto de los Leones, en la Ciudad de México.

## Algunas formas de construir una elipse

En una hoja de papel albanene (transparente) se dibuja una circunferencia y un punto dentro de ella. Se dobla la hoja de tal manera que cualquier punto de la circunferencia coincida con el punto dibujado, luego se desdobla la hoja. Repitiendo este procedimiento con un punto distinto de la circunferencia cada vez, se observa que las marcas de los dobleces han formado una elipse. El punto dibujado es un foco y el centro de la circunferencia es otro foco.

Otra forma de elaborar una elipse es cortar un cono de unicel con un plano. La dirección del corte debe estar de lado a lado de las paredes del cono sin llegar a la base. Mientras más paralelo a la base sea el corte, menos excentricidad poseerá la elipse. La elipse resulta, pues, el perímetro del corte.

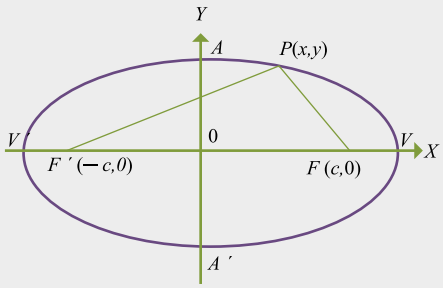


Para trazar una elipse en papel, se clavan dos chinches en dos puntos cualesquiera $F$ y $F'$ (**focos**) y posteriormente se atan a ellas los extremos de un trozo de cuerda. Se ata un lápiz al cordón y se tensa la cuerda en dirección a un punto cualquiera que no sea el que pertenece a los focos; después se realiza el trazo sobre la hoja sin destensar. La suma de las distancias $\overline{dPF}$ y $\overline{dPF'}$ es la longitud de la cuerda y, por tanto, es constante. Así, el lápiz traza una elipse con focos en $F$ y $F'$. El punto medio del segmento $\overline{F'F}$ se denomina centro de la elipse. Cambiar la posición de $F$ y $F'$ mientras se mantiene fija la longitud de la cuerda permite variar considerablemente la forma de la elipse. Si $F$ y $F'$ están lejos uno de otro, de modo que $\overline{dFF'}$ mida casi la longitud de la cuerda, entonces la elipse es angosta. Si $\overline{dFF'}$ se aproxima a cero, la elipse es casi circular. Si $F = F'$, se obtiene un círculo con centro $F$.

# 2. Ecuaciones de la Elipse

## 2.1 Forma canónica

El centro de la elipse se localiza en el punto $O(0,0)$




Para obtener una ecuación simple para la elipse, se elige el eje $x$ como la recta que pasa por los dos focos $F$ y $F'$, con el centro de la elipse en el origen. Si $F$ tiene coordenadas $(c, 0)$, con $c > 0$, entonces $F'$ tiene las coordenadas $(-c, 0)$. Por tanto, la distancia entre $F$ y $F'$ es $2c$. La suma constante de las distancias de P hasta $F$ y $F'$ se denotará por $2a$. Para obtener puntos que no están en el eje $x$, se debe considerar que $2a > 2c$; es decir, $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está sobre la elipse si y sólo si las siguientes ecuaciones equivalentes son verdaderas:

$$d\overline{PF} + d\overline{PF'} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la última ecuación, se obtiene:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

Simplificando y agrupando:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$$

O bien:

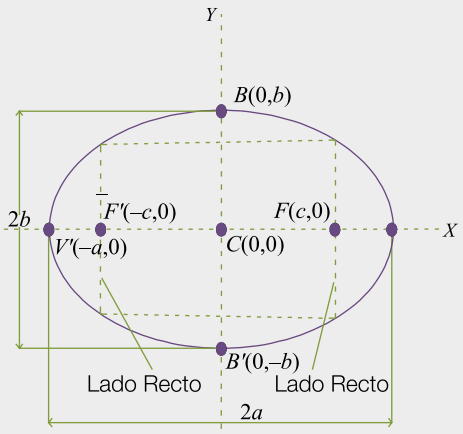
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Al dividir ambos lados entre $a^2(a^2 - c^2)$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Al recordar que $a > c$ y, por consiguiente, $a^2 - c^2 > 0$, convenimos sustituir:

$$b^2 = a^2 - c^2, \text{ de donde } b = \sqrt{a^2 - b^2}$$

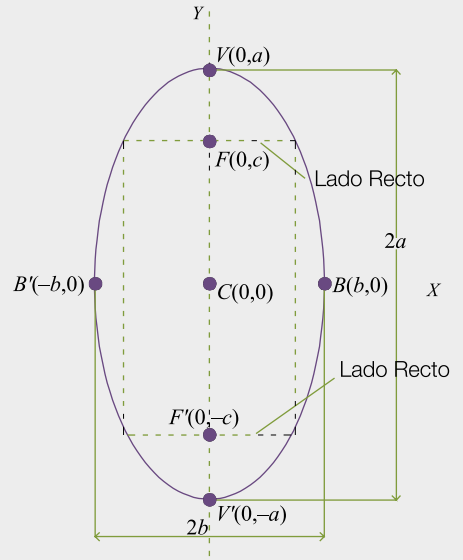



Esta sustitución conduce a la siguiente ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Como $c>0$ y $b^2=a^2-c^2$, se concluye que $a^2>b^2$ y entonces, $a>b$.

Se demuestra que las coordenadas de todo punto $(x,y)$ en la elipse satisface la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. A la inversa, si $(x,y)$ es una solución de esta ecuación, entonces, al invertir los pasos precedentes, se observa que el punto $(x,y)$ está en la elipse.

Se pueden encontrar las intersecciones en $x$ de la elipse al hacer $y=0$ en la ecuación. Al hacerlo, se obtiene $\frac{x^2}{a^2}=1$, o bien, $x^2=a^2$.




En consecuencia, las intersecciones en $x$ son $a$ y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$ en la gráfica se denominan **vértices de la elipse**. El segmento de $V'V$ se denomina **eje mayor**. De manera semejante, al hacer $x=0$ en la ecuación, se obtiene $\frac{y^2}{b^2}=1$, o bien, $y^2=b^2$. Por tanto, las intersecciones en y son $b$ y $-b$. El segmento entre $B'(0,-b)$ y $B(0,b)$ se denomina **eje menor** de la elipse. El eje mayor siempre es más grande que el eje menor, ya que $a>b$. Al aplicar pruebas de simetría, se observa que la elipse es simétrica con respecto al eje $x$ y el origen. De manera semejante, si se consideran los focos en el eje $y$, se obtiene la ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. En este caso, los vértices de la elipse son $(0,\pm a)$ y los puntos extremos del eje menor son $(\pm b,0)$.

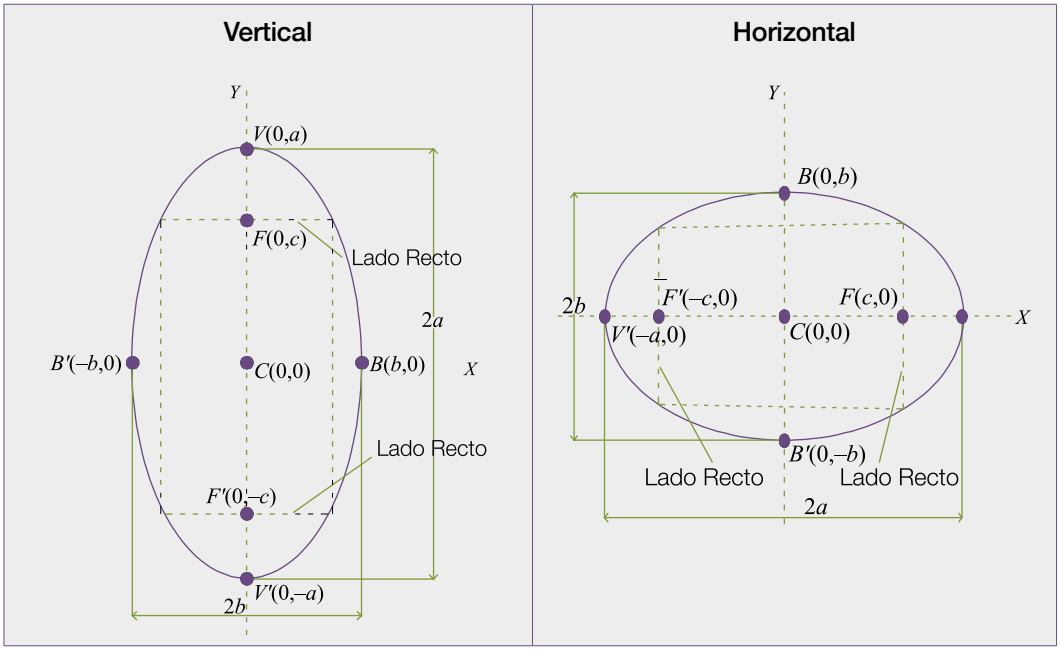
El análisis precedente puede resumirse como se muestra en la siguiente tabla. A esta ecuación se le conoce como **forma canónica** y se emplea cuando el centro de la elipse coincide con el origen (intersección de los ejes **coordenados**), tanto en forma horizontal como vertical.

## Forma canónica de la elipse

| Eje | Ecuación | Focos | Vértices | Puntos del eje menor | Relación $a$, $b$ y $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Horizontal | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | $F(c,0)$<br>$F'(-c,0)$ | $V(a,0)$<br>$V'(-a,0)$ | $B(0,b)$<br>$B'(0,-b)$ | $a^2=b^2+c^2$ |
| Vertical | $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ | $F(0,c)$<br>$F'(0,-c)$ | $V(0,a)$<br>$V'(0,-a)$ | $B(b,0)$<br>$B'(-b,0)$ | |

| Long. eje mayor | Long. eje menor | Long. lado recto | Excentricidad |
|---|---|---|---|
| $\lvert VV' \rvert = 2a$ | $\lvert BB' \rvert = 2b$ | $\lvert LL' \rvert = \frac{2b^2}{a}$ | $e=\frac{c}{a}<1$ |

## Gráficas




El valor de la excentricidad (*e*) en la elipse, no ayuda en el sentido de si es más redondeada o si se aproxima a un segmento. Sea *c* la semidistancia focal y *a* el semieje mayor: La excentricidad puede tomar valores de entre 0 y 1 ($0 \leq e \geq 1$). Es 0 cuando la elipse es una circunferencia

Ejemplo

Obtener los vértices y focos para la elipse con ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$. Trazar su gráfica.

## Solución

### Procedimiento

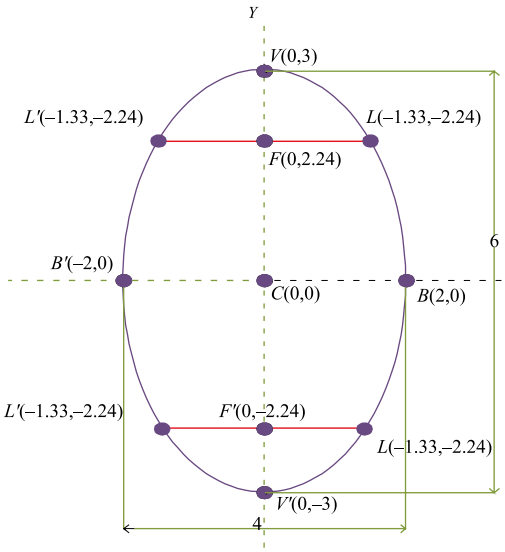
Se divide toda la ecuación por 36 $\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$, lo que resulta en $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ y tiene la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, donde el eje mayor es el eje vertical.

Donde:

$b^2 = 4$ o bien $b = 2$
$a^2 = 9$ o bien $a = 3$

| Eje | Ecuación | Focos | Vértices | Puntos del eje menor |
|---|---|---|---|---|
| Vertical | $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$<br>$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ | $F(0,c)$<br>$F'(0,-c)$<br>$F(0,2.24)$<br>$F'(0,-2.24)$ | $V(0,a)$<br>$V'(0,-a)$<br>$V(0,3)$<br>$V'(0,-3)$ | $B(b,0)$<br>$B'(-b,0)$<br>$B(2,0)$<br>$B'(-2,0)$ |
| **Relación $a$, $b$ y $c$** | **Long. Eje mayor** | **Long. Eje menor** | **Long. Lado recto** | **Excentricidad** |
| $a^2 = b^2 + c^2$<br>$a^2 - b^2 = c^2$<br>$c = \sqrt{5} = 2.24$ | $\lvert VV' \rvert = 2a$<br>$= 2(3) = 6$ | $\lvert BB' \rvert = 2b$<br>$2(2) = 4$ | $\lvert LL' \rvert = \frac{2b^2}{a}$<br>$\lvert LL' \rvert = \frac{2(2)^2}{3}$<br>$= \frac{8}{3} = 2.66$ | $e = \frac{c}{a} < 1$<br>$e = \frac{\sqrt{6}}{3} < 1$<br>$= 0.81 < 1$ |

Gráfica



Ejercicio
Módulo 4

1. Determinar los elementos y la ecuación de una elipse con vértices $V(5,0)$ y $V(-5,0)$ y focos $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$. Trazar la gráfica.

**R:** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

2. Determinar sus elementos para poder trazar la gráfica y obtener la ecuación de la elipse con centro en el origen si el eje mayor mide $10$ y el eje menor mide $6$.

   - Si su eje focal esta sobre el eje X.
   - Si su eje focal esta sobre el eje Y.



**R:** $\frac{x^2}{25} \quad \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

3. Determinar la gráfica de las ecuaciones indicadas, así como todos sus elementos.

a) $2x^2 + 9y^2 = 18$

b) $9x^2 + 4y^2 = 36$

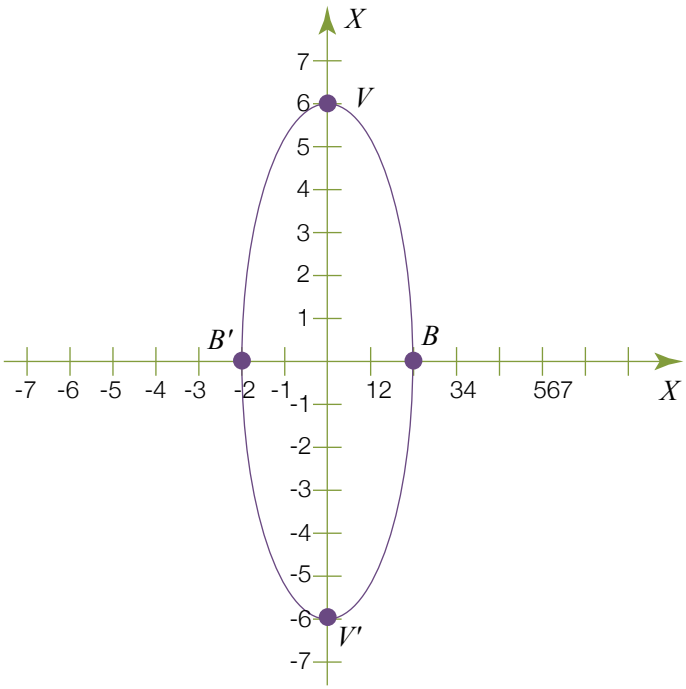
c) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$

d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

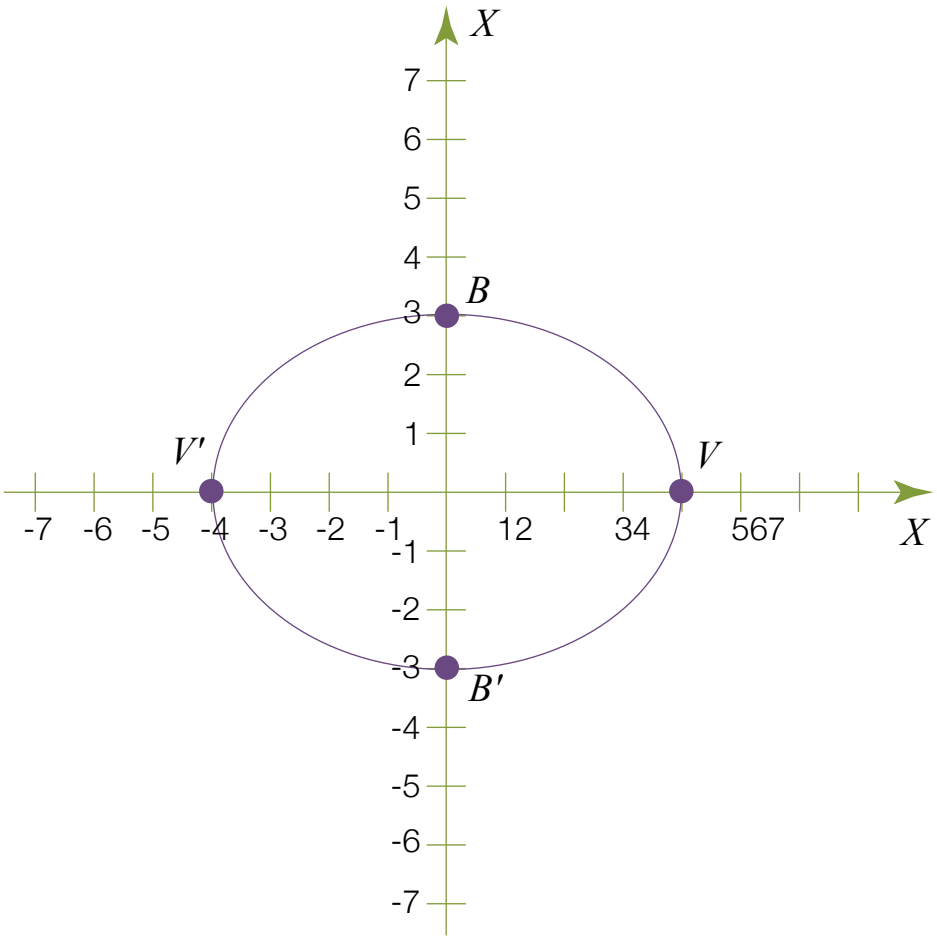


4. Determinar la ecuación de la elipse que se muestra en la gráfica

a)



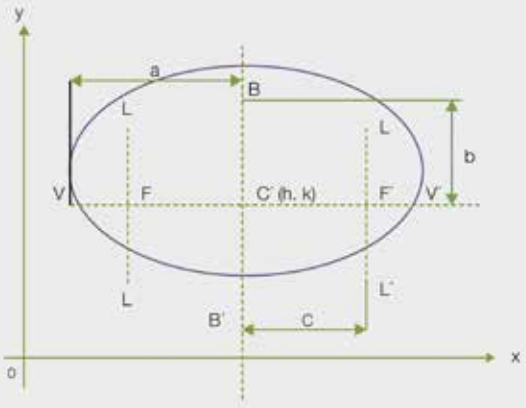
b)



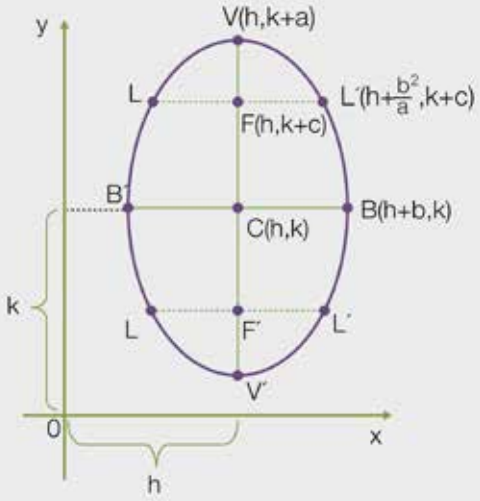
## 2.2 Forma ordinaria de la ecuación de la elipse

La ecuación de la elipse con centro $(h,k) \neq (0,0)$ está dada como se muestra en la siguiente tabla:

| Ecuación | Vértices | Focos | Puntos eje menor | Relación fundamental |
|---|---|---|---|---|
| Eje focal paralelo al eje "$X$"<br>$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ | $V(h+a,k)$<br>$V'(h-a,k)$ | $F(h+c,k)$<br>$F'(h-c,k)$ | $B(h,k+b)$<br>$B'(h,k-b)$ | $a^2=b^2+c^2$<br>**Longitud eje mayor**<br>$\lvert VV' \rvert = 2a$<br>**Excentricidad**<br>$e=\frac{c}{a}<1$<br>**Lado recto**<br>$\lvert LL' \rvert = \frac{2b^2}{a}$<br>**Longitud eje menor**<br>$\lvert BB' \rvert = 2b$ |
| Eje focal paralelo al eje "$Y$"<br>$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ | $V(h,k+a)$<br>$V'(h,k-a)$ | $F(h,k+c)$<br>$F'(h,k-c)$ | $B(h+b,k)$<br>$B'(h-b,k)$ | |




Eje focal paralelo al eje "X"




Eje focal paralelo al eje "Y"

Ejemplo

Obtener la ecuación de la elipse en su forma ordinaria, si sus vértices y sus focos son los puntos $V(13,-5), V'(3,-5), F(10,-5), F'(6,-5)$. Trazar la gráfica.

## Solución

| Datos | Fórmulas |
|---|---|
| $V(13,-5)$<br>$V'(3,-5)$<br>$F(10,-5)$<br>$F'(6,-5)$ | $a=\lvert\overline{CV}\rvert \qquad c=\lvert\overline{CF}\rvert$<br>$b^2=a^2-c^2 \qquad \lvert LL'\rvert=\frac{2b^2}{a}$<br>$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$<br>$C=(h,k)\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$ |

### Procedimiento

Se determina el centro de la elipse (punto medio entre los vértices)

$$C=(h,k)\begin{cases}x=\frac{13+3}{2}=\frac{16}{2}=8\\ y=\frac{-5-5}{2}=\frac{-10}{2}=-5\end{cases}$$

$$C(8,-5)\begin{cases}h=8\\ k=-5\end{cases}$$

Obtención de "$a$" y "$c$":

$$a=\lvert\overline{CV}\rvert=\sqrt{(13-8)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{(5)^2+0^2}=\sqrt{25}=5$$

$$c=\lvert\overline{CF}\rvert=\sqrt{(10-8)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{(2)^2+0^2}=\sqrt{2^2}=2$$

Obtención de "$b$":

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}\approx 4.58$$

Puntos del eje menor:

$$B(h,k-b)=(8,-5+4.58)=(8,-0.42)$$

$$B(h,k+b)=(8,-5-4.58)=(8,-9.58)$$

Lado recto:

$$\lvert\overline{LL'}\rvert=\frac{2(\sqrt{21})^2}{5}=\frac{2(21)}{5}=\frac{42}{5}$$

Excentricidad

$$e = \frac{2}{5} < 1$$

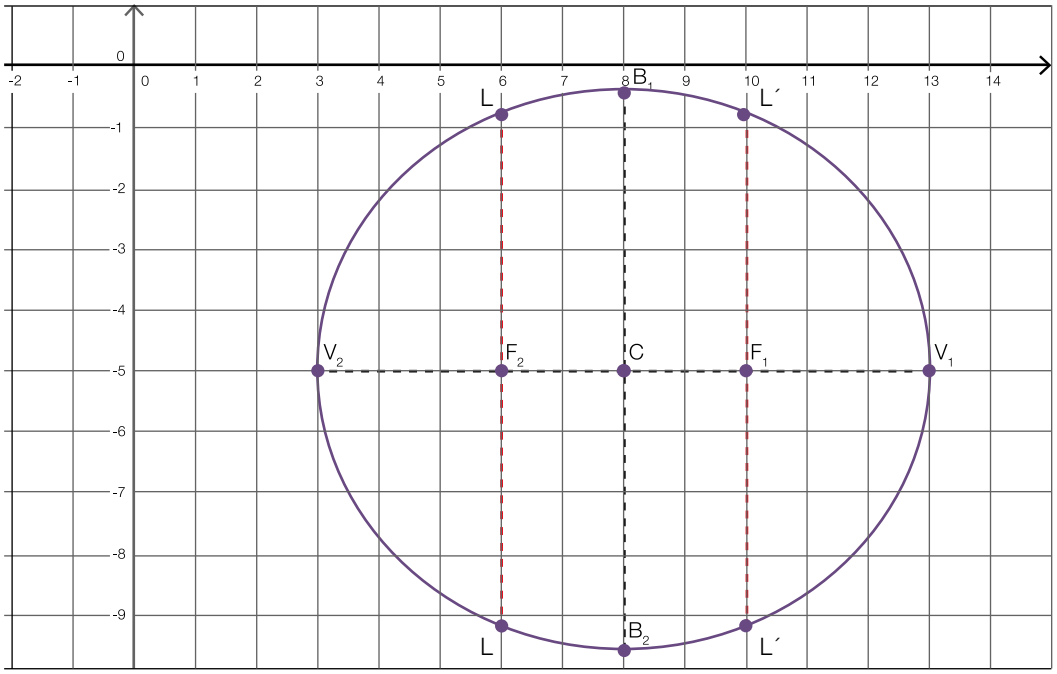
Como se trata de una elipse horizontal, tenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-8)^2}{(5)^2} + \frac{(y-(-5))^2}{(\sqrt{21})^2} = 1$$

La ecuación de la elipse en su forma ordinaria es:

$$\frac{(x-8)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{21} = 1$$






**Ejemplo**

Determinar la ecuación de la elipse con centro en $C(-4,6)$, que tiene eje mayor vertical con longitud igual a 12 y longitud del lado recto igual a 3. Trazar la gráfica.

## Solución

| Datos | Fórmulas |
|---|---|
| $C(-4,6)$ | $c^2 = a^2 - b^2$ |
| $h=-4, k=6$ | $\lvert\overline{LL'}\rvert = \frac{2b^2}{a}$ |
| $2a = 12 \quad a = 6$ | $e = \frac{c}{a} < 1$ |
| $\lvert\overline{LL'}\rvert = 3$ | $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ |

Se determina el valor de "$b$" en la forma:

$$3 = \frac{2b^2}{6}$$

$$18 = 2b^2$$

$$\frac{18}{2} = b^2$$

$$b = \sqrt{9} = 3$$

Como se trata de una elipse vertical, se utiliza la siguiente expresión:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-(-4))^2}{(3)^2} + \frac{(y-6)^2}{(6)^2} = 1$$

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$$

Coordenadas de los vértices:

$$V(h,k+a) = (-4,6+6) = (-4,12)$$

$$V'(h,k-a) = (-4,6-6) = (-4,0)$$

Focos:

$$F(h,k+c) = (-4,6+5.2) = (-4,11.2)$$

$$F'(h,k-c) = (-4,6-5.2) = (-4,0.8)$$

Puntos del eje menor:

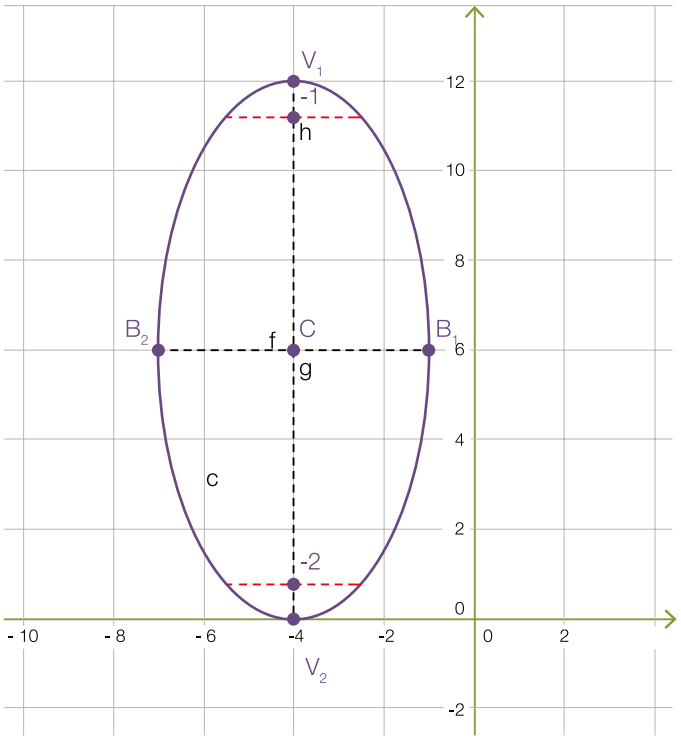
$$B(h+b,k) = (-4+3,6) = (-1,6)$$

$$B'(h-b,k) = (-4-3,6) = (-7,6)$$

Excentricidad:

$$e = \frac{5.2}{6} < 1$$

Gráfica:






**Ejercicio**
Módulo 4

Obtener la ecuación y la gráfica de la elipse que cumple con las siguientes condiciones:

a) Eje menor = 6. Focos $(7,3)$ y $(7,-5)$

**Solución:** $\frac{(x-7)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

b) Centro $(-6,-8)$, Foco $(0,-8)$ y excentricidad = $0.6$

**Solución:** $\dfrac{(x+6)^2}{100}+\dfrac{(y+8)^2}{64}=1$

**Ejemplo**

Determinar todos los elementos de la siguiente elipse: $\dfrac{(x-3)^2}{144}+\dfrac{(y+2)^2}{81}=1$. Trazar la gráfica.

**Solución**

| Datos | Fórmulas |
|---|---|
| $C(3,-2)\begin{cases}h=3\\k=-2\end{cases}$ | $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ |
| $a^2=144 \quad a=12$ | $c^2=a^2-b^2$ |
| $b^2=81 \quad b=9$ | $\lvert\overline{LL'}\rvert=\dfrac{2b^2}{a}$ |
| | $V(h+a,k)$ |
| | $V'(h-a,k)$ |
| | $F(h+c,k)$ |
| | $F'(h-c,k)$ |
| | $B(h,k+b)$ |
| | $B'(h,k-b)$ |
| | $e=\dfrac{c}{a}<1$ |

Se determina el valor de "$c$":

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144 - 81} = \sqrt{63} = 7.93$$

Se obtiene los vértices:

$$V(3+12,-2)\quad V(15,-2)$$
$$V'(3-12,-2)\quad V'(-9,-2)$$

Se obtiene los focos:

$$F(3+7.93,-2)\quad F(10.93,-2)$$
$$F'(3-7.93,-2)\quad F'(-4.93,-2)$$

Se obtienen las coordenadas del eje menor:

$$B(3,-2+9)\quad B(3,7)$$
$$B'(3,-2-9)\quad B'(3,-11)$$

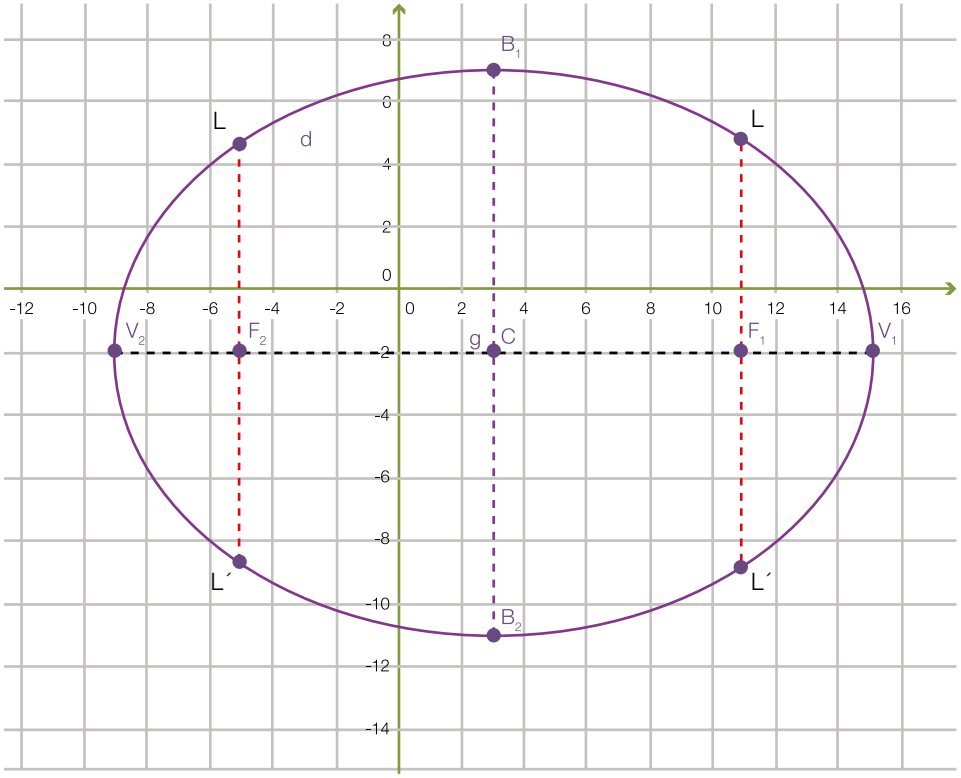
Lado recto:

$$|\overline{LL'}| = \frac{2(9)^2}{12} = \frac{2(81)}{12} = \frac{162}{12} = 13.5$$

Excentricidad:

$$e = \frac{7.93}{12} < 1$$

Gráfica:



Ejercicio
Módulo 4

1. Obtener la ecuación, elementos y la gráfica de la elipse con centro en $(6,-3)$, vértice en $V(6,4)$ y longitud del lado recto igual a $\frac{20}{7}$.

**Solución:** $\frac{(x-6)^2}{10}+\frac{(y+3)^2}{49}=1$

$C(6,-3), V(6,4), V'\ (6,-10), F\ 6,3.24), F'(6,-9.24), B(9.16,-3), B'(2.84,-3),$

$e=\frac{6.24}{7}<1$

2. Obtener la ecuación, elementos y la gráfica de la elipse con centro en $(-8,2)$, que tiene eje mayor horizontal con longitud igual a $10$ y longitud del lado recto igual a $4$.

**Solución:** $\frac{(x+8)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{10}=1$

$C(-8,2), V(-3,2), V'(-13,2), F(-4.12,2), F'(-11.88,2), B(-8,5.16), B'(-8,-1.16),$

$e=\frac{3.88}{5}<1$

3. Determinar todos los elementos de las siguientes elipses y graficar:

a) $\frac{(x+5)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{49}=1$

**R:**

$C(-5,4), V(-5,11), V'(-5,-3), F(-5,8.89), F'(-5,-0.89), B(0,4), B'(-10,4), LR=\frac{50}{7}, e=\frac{4.89}{7}<1$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

**R:**

$C(0,2), V(0,7,), V'(0,-3), F(0,5), F'(0,-1), B(4,2), B'(-4,2), LR=\frac{32}{5}, e=\frac{3}{5}<1$

c) $\frac{(x-4)^2}{18}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

**R:**

$C(4,-1), V(8.24,-1), V'(-0.24,-1), F(7,-1), F'(1,-1), B(4,2), B'(4,-4), LR=4.24, e=\frac{3}{4.24}<1$

## 2.3 Ecuación general de la elipse

Dadas las ecuaciones ordinarias de la elipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Multiplicando por $a^2b^2$, desarrollando los cuadrados, trasponiendo y ordenando términos, se obtiene la ecuación de la elipse en su **forma general**: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Los coeficientes $A$ y $C$ son diferentes de cero, diferentes numéricamente y poseen el mismo signo.

Los coeficientes de primer grado $E$ y $D$ indican que el centro de la elipse está fuera del origen.

Si $D=0$, el centro se localiza sobre el eje "$y$". Si $E=0$, se localiza sobre el eje "$x$"

El término independiente $F\neq 0$ indica que la elipse no pasa por el origen. Si $F=0$, pasa por el origen.

Recíprocamente, si la elipse está dada en su forma general, puede transformarse a su forma ordinaria aplicando el método de completar trinomios cuadrados perfectos.

Ejemplo

Transformar la ecuación $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$ a la forma ordinaria.

**Solución**

Ordenando y agrupando términos:

$$x^2-6x+4y^2+16y=-21$$

Completando cuadrados en $x \wedge y$:

$$x^2-6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2+4\left(y^2+4y+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right)=-21+\left(\frac{6}{2}\right)^2+4\left(\frac{4}{2}\right)^2$$

Se obtiene:

$$(x-3)^2+4(y+2)^2=-21+9+16$$

Ordenando se tiene que:

$$(x-3)^2+4(y+2)^2=4$$

Dividiendo entre 4, se obtiene:

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$$

La cual corresponde a la ecuación de una elipse con centro $C$ (3, -2), paralela al eje $x$.

Ejercicio
Módulo 4

Reducir las ecuaciones dadas, a la forma ordinaria de la elipse.

a) $9x^2 + 4y^2 + 18x + 16y = 11$

R:

$$\frac{x^2}{4} += \frac{y^2}{9} \quad 1$$

M4
Basado en competencias

b) $7x^2 + 4y^2 + 42x + 40y + 135 = 0$

R:

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{7} = 1$$

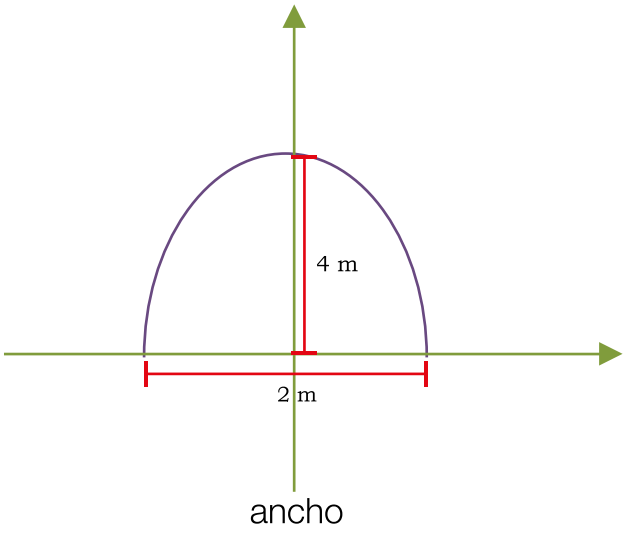
# 3. Determinación de la ecuación de una elipse sujeta a condiciones dadas

Ejercicio
Módulo 4

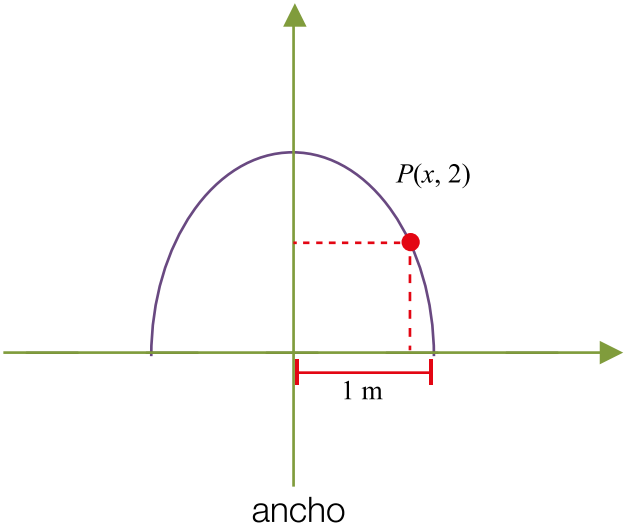
Una puerta tiene forma de arco semielíptico. En la base, mide 2 metros de ancho y la altura en el centro es de 4 metros. Se tiene que pasar a través de ella una caja de 2 metros de altura. ¿Cuál es la anchura máxima que puede tener la caja?

## Solución

Si se considera a los ejes coordenados como se muestra en la figura, la semielipse será vertical y los valores de $a$ y $b$ serán: $a = 4$ y $b = 1$. La ecuación de la semielipse es: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$




Ahora bien, el caso más crítico se presenta cuando las aristas de la caja tocan la puerta como se muestra:



Sustituyendo $a^2 = 16$, $b^2 = 1$ y por condiciones del problema $y = 2$ entonces $P(x,2)$ el punto sera cuando la caja toca a la puerta, y como pertenece a la elipse, debe satisfacer la ecuación. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Despejando a "$x$":

$$\frac{x^2}{1} + \frac{(2)^2}{16} = 1$$

$$x^2 + \frac{4}{16} = 1$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

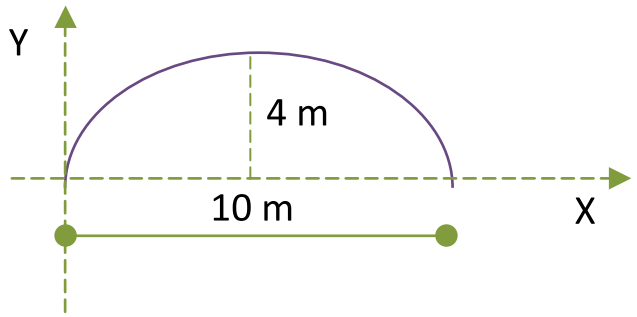
$$x = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.866\ m$$

En conclusión, el ancho máximo que puede tener la caja es $2(0.866) = 1.732\ m$.

M4 Basado en competencias

Ejercicio
Módulo 4

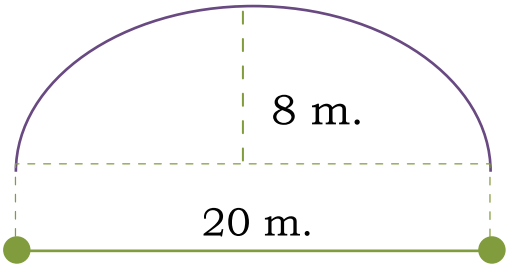
La cubierta semielíptica de una nave industrial tiene $10\ m$ de anchura y $4\ m$ de altura en el centro. ¿A qué distancia máxima del centro se colocarán dos postes de $2\ m$ de alto?



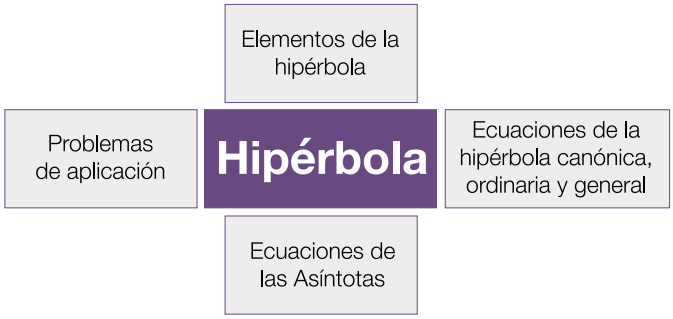

**R:** *dist.* = 4.33 *m.*

**Ejercicio**
Módulo 4

La cubierta de un centro comercial tiene la forma de una semielipse de 20 *m* de ancho y 8 *m* de alto en el centro. ¿Qué altura máxima deben tener dos postes situados a 6 metros del centro?




**R:** *altura* = 6.4 *m.*




# INTRODUCCIÓN

En este módulo, se presentan situaciones problema que se modelan con una hipérbola, en un principio con la construcción de la misma según definición y, por último, aborda situaciones problema donde se pide determinar todos los elementos de la misma. También, se les proporciona una ecuación general para determinar sus elementos y, al mismo tiempo, trazar su gráfica.

M4 Basado en competencias

Las aplicaciones en este módulo con respecto a la vida cotidiana de los alumnos encierran un amplio espectro, pues resulta importante que el alumno comprenda el proceso de la representación de este tipo problemas por medio de la hipérbola en sus diferentes formas y aplicaciones, con la intención de que se involucre con el espacio que lo rodea específicamente al identificar los elementos que componen modelos arquitectónicos de la historia en contraste con aquellos más contemporáneos. A su vez, da cuenta de la relevancia que posee en el rubro de la decoración de interiores (edificios, templos, casas, estadios deportivos, zonas recreativas) y en espacios abiertos, como los que se muestran en las diferentes situaciones que se plantean en el desarrollo de este apartado.

## Historia de la hipérbola

Según la tradición, las secciones cónicas fueron determinadas por el matemático y geómetra griego Menecmo (380 A.C-320 A.C), quien trató de resolver el problema de la duplicación de cubo utilizando la parábola y la hipérbola. Sin embargo, el personaje al que se le atribuye emplear el término “hipérbola” por primera ocasión es al geómetra griego Apolonio de Perge (262 A.C.-190 A.C.), quien, en su tratado Cónicas, considerada obra cumbre de las matemáticas griegas, desarrolla el estudio de las tangentes a secciones cónicas. También, se le reconoce por introducir los términos de “Elipse” y “Parábola”.

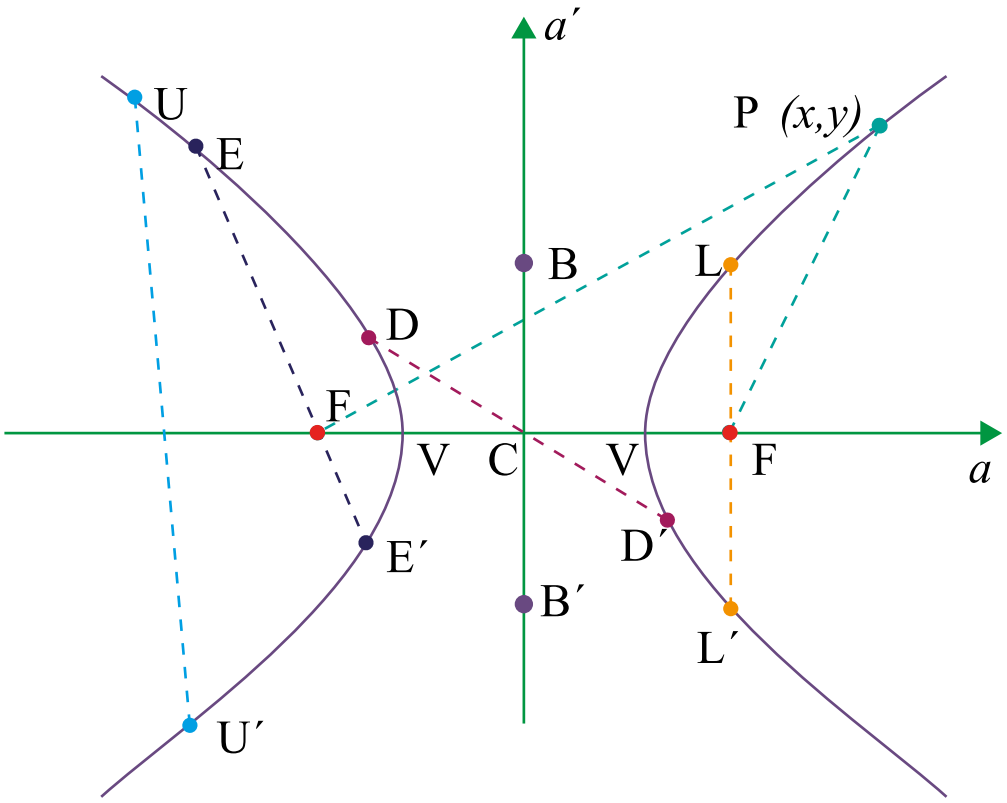
# 4. Definición

Una hipérbola es el lugar geométrico descrito por un punto “P” en el plano, de tal modo que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano F´ y F (llamados focos) es siempre una cantidad constante igual a 2a y menor a la distancia que existe entre esos puntos fijos.

Esto es:

$$||PF'|-|PF||=2a$$

## 4.1 Elementos de la hipérbola




$F$ y $F'$: Focos de la hipérbola.

$C$: Centro de la hipérbola.

$a$: Eje focal (recta que pasa por los focos, vértices y centro).

$a'$: Eje normal (recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal).

$V$ y $V'$: Vértices de la hipérbola.

$\overline{VV'} = 2a$: Eje transverso (porción del eje focal comprendida entre los vértices).

$\overline{BB'}$ : Eje conjugado de la hipérbola (porción del eje normal comprendida entre los puntos $B$ y $B'$ que tiene como punto medio el centro).

$\overline{UU'}$ : Cuerda (segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola).

$\overline{EE'}$ : Cuerda focal (cuerda que pasa por un foco).

$\overline{LL'}$ : Lado recto (cuerda focal perpendicular al eje focal).

$\overline{DD'}$ : Diámetro (es una cuerda que pasa por el centro, y es variable).

$\overline{PF}$ y $\overline{PF'}$ : Radios vectores de $P$.

# 5. Ecuaciones de la hipérbola en sus diferentes formas

## 5.1 Forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola

La ecuación ordinaria de la hipérbola, de modo que el centro coincida con el punto $C\ (h, k) \neq (0, 0)$, está dada en la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ Ecuación ordinaria con eje focal paralelo al eje $X$.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ Ecuación ordinaria con eje focal paralelo al eje $Y$.

| Ecuación | Vértices | Focos | Puntos eje menor | Asíntontas | Relación fundamental |
|---|---|---|---|---|---|
| Eje focal coincide con el eje "$X$" $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ | $V(h+a,k)$ $V'(h-a,k)$ | $F(h+c,k)$ $F'(h-c,k)$ | $B(h,k+b)$ $B'(h,k-b)$ | $\lambda \Rightarrow (y-k) = \frac{b}{a}(x-h)$ $\lambda' \Rightarrow (y-k) = -\frac{b}{a}(x-h)$ | $c^2 = a^2 + b^2$ **Longitud eje transverso** $\lvert VV' \rvert = 2a$ **Excentricidad** $e = \frac{c}{a} > 1$ **Lado recto** $\lvert L.R \rvert = \frac{2b^2}{a}$ **Longitud eje conjugado** $\lvert BB' \rvert = 2b$ |
| Eje focal coincide con el eje "$Y$" $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ | $V(h,k+a)$ $V'(h,k-a)$ | $F(h,k+c)$ $F'(h,k-c)$ | $B(h+b,k)$ $B'(h-b,k)$ | $\lambda \Rightarrow (y-k) = \frac{a}{b}(x-h)$ $\lambda' \Rightarrow y-k = -\frac{a}{b}(x-h)$ | |

https://www.geometriadinamica.es/index.php?option=com_content&view=article&id=207:hiprbola-excentricidad&catid=25:cnicas-y-otras-curvas&Itemid=100; consultada el día 5/01/19 a las 13:00 hrs

**Ejemplo**

Obtener los elementos y trazar la gráfica de la ecuación de la hipérbola.

$$\frac{(x+5)^2}{169} - \frac{(y-4)^2}{121} = 1$$

**Solución**

La ecuación representa a una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

De la cual se obtiene los siguientes parámetros:

$$-h = 5 \quad -k = -4$$

$$h = -5 \quad k = 4$$

El centro es $C(-5,4)$

$a^2 = 169 \qquad a = 13$
$b^2 = 121 \qquad b = 11$

Utilizando la relación fundamental:

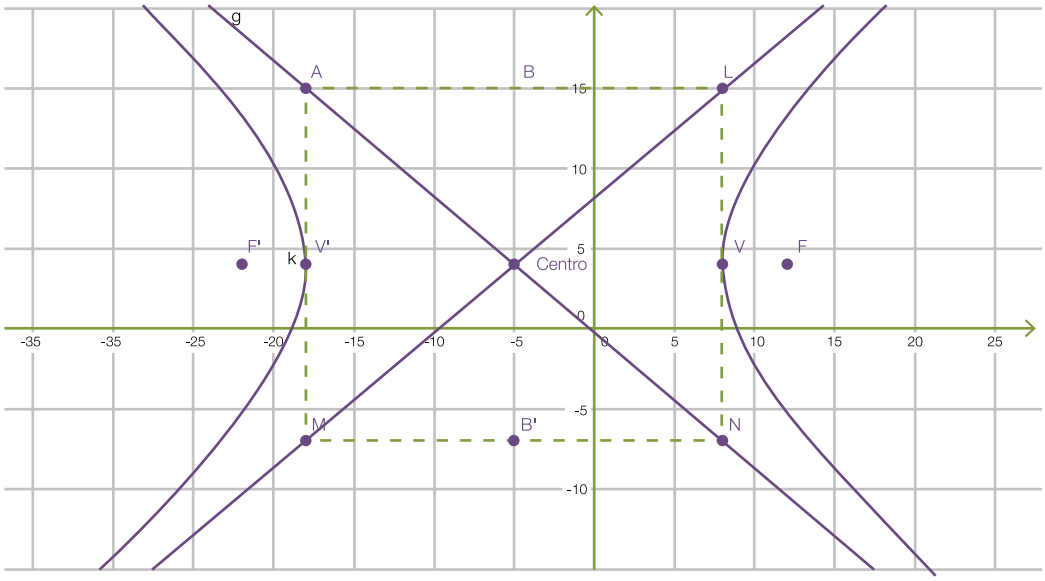
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{169 + 121} = \sqrt{290}$$

Los valores son: h= $-5$, k= $-4$, a= 13, b=11 y c=$\sqrt{290}$

Obteniendo los elementos, se tiene que:

| | | |
|---|---|---|
| **Vértices** | $V(h+a,k)$<br>$V(-5+13,4)$<br>$V(8,4)$ | $V'(h-a,k)$<br>$V'(-5-13,4)$<br>$V'(-18,4)$ |
| **Focos** | $F(h+c,k)$<br>$F(-5+\sqrt{290},4)$<br>$F(12.02,4)$ | $F'(h-c,k)$<br>$F'(-5-\sqrt{290},4)$<br>$F'(-22.02,4)$ |
| **Extremos del eje conjugado** | $B(h,k+b)$<br>$B(-5,4+11)$<br>$B(-5,15)$ | $B'(h,k-b)$<br>$B'(-5,4-11)$<br>$B'(-5,-7)$ |
| **Asíntotas** | $\lambda \Rightarrow y-k=\frac{b}{a}(x-h)$<br>$\lambda \Rightarrow (y-4)=\frac{11}{13}(x+5)$ | $\lambda' \Rightarrow (y-k)=-\frac{b}{a}(x-h)$<br>$\lambda' \Rightarrow (y-k)=-\frac{11}{13}(x+5)$ |
| **Lado recto** | $LR=\frac{2b^2}{a}$ | $LR=\frac{2(11)^2}{13}=\frac{242}{13}$ |
| **Eje transverso** | $VV'=2a$ | $VV'=2(13)=26$ |
| **Eje focal** | $FF'=2c$ | $FF'=2(\sqrt{260})=2\sqrt{290}$ |
| **Eje conjugado** | $BB'=2b$ | $BB'=2(11)=22$ |
| **Excentricidad** | $e=\frac{c}{a}>1$ | $e=\frac{\sqrt{290}}{13}>1$ |

Gráficamente:




M4

Basado en competencias

**Ejercicio**
Módulo 4

La Ecuación de una hipérbola es $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$. Obtener todos sus elementos y trazar su gráfica.

**R:** $C\,(1,-2), \mathrm{V}(3,-2), \mathrm{V}'(-5,-2), F\,(4,-2), \mathrm{F}'\,(-6,-2),\ LR=4.5,\ \mathrm{e}=\frac{5}{4}>1,$

$B\,(-1,1), B'(-1,-5),\ \lambda\Rightarrow\ \mathrm{y}\,\frac{3}{4}\,(x+1)-2,\ \lambda'\Rightarrow y'=-\frac{3}{4}\,(x+1)-2$

La ecuación de una hipérbola es $\frac{(y-6)^2}{15}-\frac{(x+3)^2}{10}=1$. Obtener todos sus elementos y trazar su gráfica.

**Solución:**

La ecuación representa a una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

De la cual se obtiene los siguientes parámetros: $\begin{matrix} -k=-6 & -h=3 \\ k=6 & h=-3 \end{matrix}$

El centro es $C(-3,6)$

$a^2=15 \quad a=\sqrt{15}\approx 3.87$

$b^2=10 \quad b=\sqrt{10}\approx 3.16$

Utilizando la relación fundamental:

$c^2=a^2+b^2$

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$c=\sqrt{15+10}=\sqrt{25}=5$

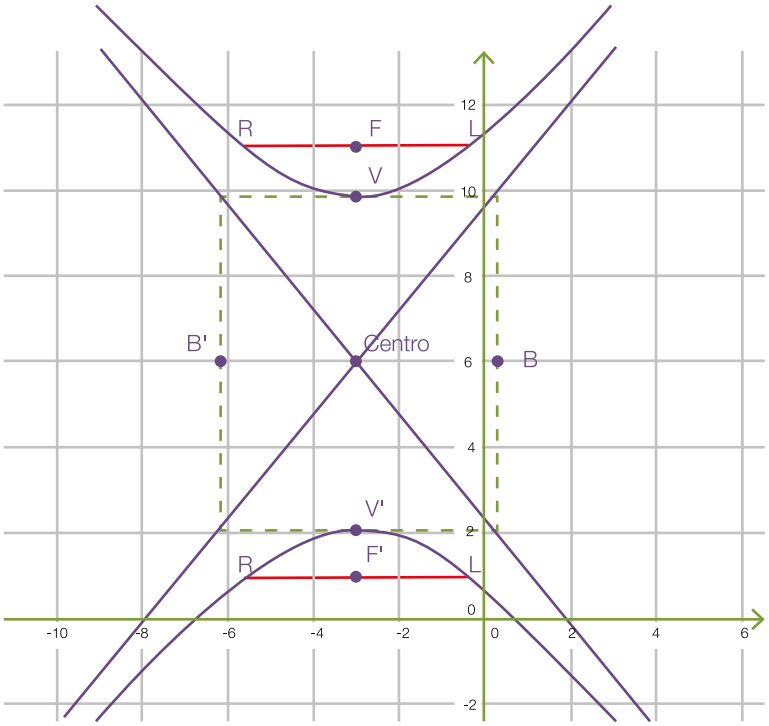
Los valores son: $h=-3, k=6, a=3.87, b=3.16$ y $c=5$

Obteniendo los elementos, se tiene que:

| | | |
|---|---|---|
| **Vértices** | $V(h,k+a)$<br>$V(-3,6+3.87)$<br>$V(-3,9.87)$ | $V'(h,k-a)$<br>$V'(-3,6-3.87)$<br>$V'(-3,2.13)$ |
| **Focos** | $F(h,k+c)$<br>$F(-3,6+5)$<br>$F(-3,11)$ | $F'(h,k-c)$<br>$F'(-3,6-5)$<br>$F'(-3,1)$ |
| **Extremos del eje conjugado** | $B(h+b,k)$<br>$B(-3+3.16,6)$<br>$B(0.16,6)$ | $B'(h-b,k)$<br>$B'(-3-3.16,6)$<br>$B'(-6.16,6)$ |
| **Asíntotas** | $\lambda \Rightarrow y-k=\frac{a}{b}(x-h)$<br>$\lambda \Rightarrow (y-6)=\frac{3.87}{3.16}(x+3)$<br>$\lambda \Rightarrow (y-6)=1.22(x+3)$ | $\lambda' \Rightarrow (y-k)=\frac{a}{b}(x-h)$<br>$\lambda' \Rightarrow (y-k)=-1.22(x+3)$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Lado recto** | $LR = \frac{2b^2}{a}$ | $LR = \frac{2(10)}{3.87} = \frac{20}{3.87} = 5.16$ |
| **Eje transverso** | $VV' = 2a$ | $VV' = 2(3.87) = 7.74$ |
| **Eje focal** | $FF' = 2c$ | $FF' = 2(5) = 10$ |
| **Eje conjugado** | $BB' = 2b$ | $BB' = 2(3.16) = 6.32$ |
| **Excentricidad** | $e = \frac{c}{a} > 1$ | $e = \frac{5}{3.87} > 1$ |

Gráficamente:




M4 Basado en competencias

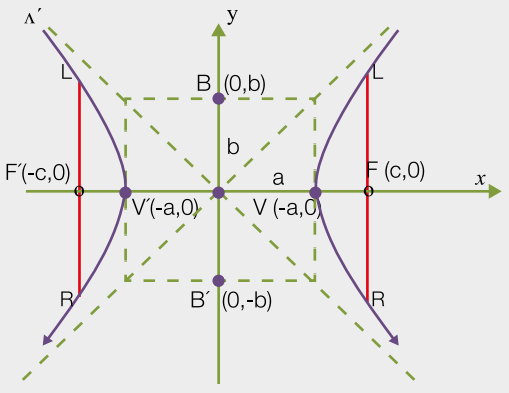
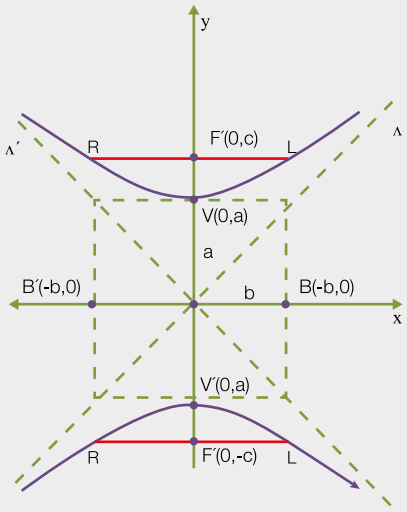
Ejercicio
Módulo 4

La ecuación de una hipérbola es $\frac{(y-5)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$. Obtener todos sus elementos y trazar su gráfica.

**R:** $C(-2,5),\ V\,(-2,8),\ V'(-2,2),\ F\,(-2,8.6),\ F(-2,1.14),\ \text{LR}=\ \frac{8}{3},\ e=\frac{\sqrt{13}}{3}>1$

$$B\,(0,\,5),\ B'(-4,5),\ \ \lambda\Rightarrow\,(y-5)=\frac{3}{2}\,(x+2),\ \lambda'\Rightarrow(y-5)=-\frac{3}{2}\,(x+2)$$

## 5.2 Ecuación de la hipérbola en su forma canónica

| Hipérbola Horizontal | Hipérbola Vertical |
|---|---|
|  |  |

| Ecuación | Vértices | Focos | Puntos eje menor | Asíntontas | Relación fundamental |
|---|---|---|---|---|---|
| Eje horizontal<br>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | $V(a,0)$<br>$V'(-a,0)$ | $F(c,0)$<br>$F'(-c,0)$ | $B(0,b)$<br>$B'(0,-b)$ | $\lambda \Rightarrow y=\frac{b}{a}x$<br>$\lambda' \Rightarrow y-\frac{b}{a}x$ | $c^2=a^2+b^2$<br>$c>b, c>a$<br>**Longitud eje transverso**<br>$\lvert\overline{VV'}\rvert=2a$<br>**Excentricidad**<br>$e=\frac{c}{a}>1$<br>**Lado recto**<br>$L.R=\frac{2b^2}{a}$<br>**Longitud eje conjugado**<br>$\lvert BB'\rvert=2b$<br>**Eje focal**<br>$=2c$ |
| Eje vertical<br>$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ | $V(0,a)$<br>$V'(0,-a)$ | $F(0,c)$<br>$F'(0,-c)$ | $B(b,0)$<br>$B'(-b,0)$ | $\lambda \Rightarrow y=\frac{a}{b}x$<br>$\lambda' \Rightarrow y-\frac{a}{b}x$ | |

M4 Basado en competencias

**Ejemplo**

Determinar los elementos de las hipérbolas, cuyas ecuaciones se indican, y trazar sus gráficas:

a) $9x^2-4y^2-36=0$

**Solución**

Se transforma la ecuación a la forma canónica:

$9x^2-4y^2-36=0$

Se divide entre el término independiente y se simplifica: $9x^2-4y^2=36$

$$\frac{9x^2}{36}-\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36}$$

Ecuación en su forma canónica: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

La ecuación representa a una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

De la cual se obtienen los siguientes parámetros:

$a^2=4 \quad a=2$

$b^2=9 \quad b=3$

Utilizando la relación fundamental:

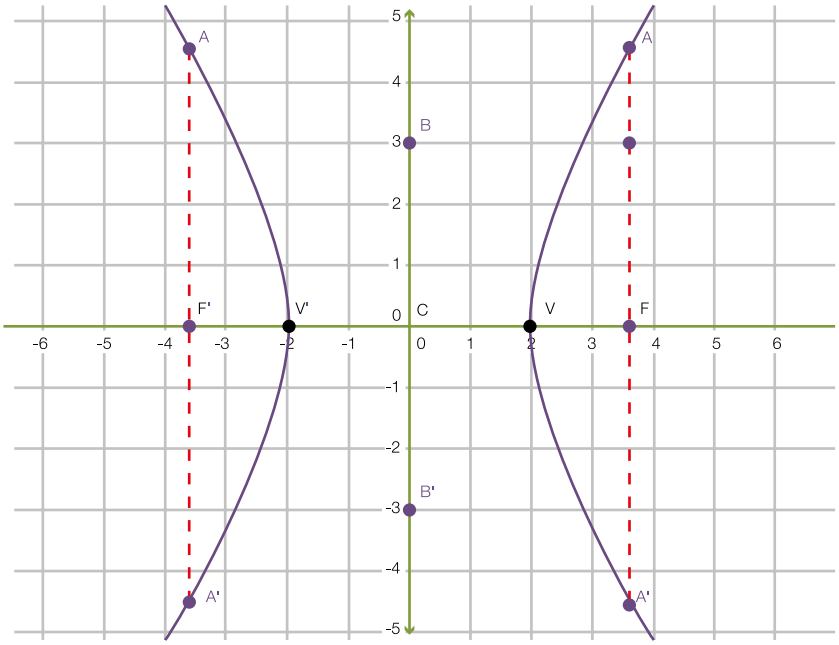
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Los valores son: $a = 2, b = 3$ y $c = \sqrt{13}$

Obteniendo los elementos, se tiene que:

| | | |
|---|---|---|
| **Vértices** | $V(a,0), V(2,0)$ | $V'(-a,0), V(-2,0)$ |
| **Focos** | $F(c,0), F(\sqrt{13},0)$ | $F'(-c,0), F'(-\sqrt{13},0)$ |
| **Extremos del eje conjugado** | $B(0,b), B(0,3)$ | $B'(0,-b), B'(0,-3)$ |
| **Lado recto** | $LR = \frac{2b^2}{a}$ | $\lvert LR \rvert = \frac{2(3)^2}{2} = \frac{18}{2} = 9$ |
| **Eje transverso** | $\overline{VV'} = 2a$ | $\overline{VV'} = 2(2) = 4$ |
| **Eje focal** | $\overline{FF'} = 2c$ | $\overline{FF'} = 2(\sqrt{13}) = 2\sqrt{13}$ |
| **Eje conjugado** | $\overline{BB'} = 2b$ | $\overline{BB'} = 2(3) = 6$ |
| **Excentricidad** | $e = \frac{c}{a} > 1$ | $e = \frac{\sqrt{13}}{2} > 1$ |

Su gráfica es:



b) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

**Solución**

Se transforma la ecuación a la forma canónica: $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

Se divide entre el término independiente y se simplifica: $16x^2 - 9y^2 = -144$

$$\frac{16x^2}{-144} - \frac{9y^2}{-144} = \frac{-144}{-144}$$

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Ecuación en su forma canónica: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

La ecuación representa una hipérbola vertical de la forma: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

De la cual se obtienen los siguientes parámetros:

$a^2 = 16 \quad a = 4$

$b^2 = 9 \quad b = 3$

Utilizando la relación fundamental:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

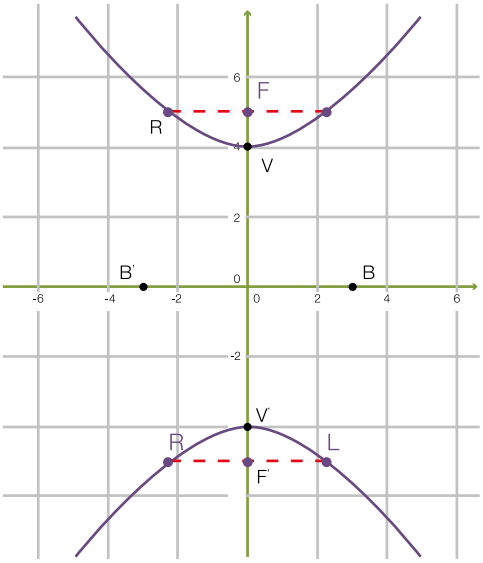
$c = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Los valores son: $a = 4, b = 3, c = 5$

Obteniendo los elementos, se tiene que:

| | | |
|---|---|---|
| **Vértices** | $V(0,a), V(0,4)$ | $V'(0,-a), V'(0,-4)$ |
| **Focos** | $F(0,c), F(0,5)$ | $F'(0,-c), F'(0,-5)$ |
| **Extremos del eje conjugado** | $B(b,0), B(3,0)$ | $B'(-b,0), B'(-3,0)$ |
| **Lado recto** | $LR = \frac{2b^2}{a}$ | $\lvert LR \rvert = \frac{2(3)^2}{4} = \frac{18}{4} = 4.5$ |
| **Eje transverso** | $\overline{VV'} = 2a$ | $\overline{VV'} = 2(4) = 8$ |
| **Eje focal** | $\overline{FF'} = 2c$ | $\overline{FF'} = 2(5) = 10$ |
| **Eje conjugado** | $\overline{BB'} = 2b$ | $\overline{BB'} = 2(3) = 6$ |
| **Excentricidad** | $e = \frac{c}{a} > 1$ | $e = \frac{5}{4} > 1$ |

Su gráfica es:




## 5.3 Forma general de la ecuación de la hipérbola

Toda ecuación de hipérbola puede escribirse como se muestra a continuación:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde $A$ y $C$ tienen signos diferentes y son también diferentes de cero.

Si la ecuación de hipérbola esta expresada en forma general, su fórmula reducida puede obtenerse completando trinomios cuadrados perfectos.

Ejemplo

A partir de la ecuación de la hipérbola en forma general $36x^2 - 64y^2 + 144x + 384y - 2736 = 0$ determinar:

a) La ecuación de la hipérbola en forma ordinaria
b) Las coordenadas del centro
c) La longitud del eje transverso
d) La longitud del eje conjugado
e) La ecuación de sus asíntotas
f) La excentricidad
g) Las coordenadas de los vértices
h) Las coordenadas de los focos
i) Trace la gráfica

**Solución**

Para determinar la ecuación de la hipérbola en su forma ordinaria, se realiza el siguiente procedimiento.

Completar el trinomio cuadrado perfecto:

$$36x^2 - 64y^2 + 144x + 384y - 2736 = 0$$

$$(36x^2 + 144x) - (64y^2 - 384y) = 2736$$

$$36(x^2 + 4x) - 64(y^2 - 6y) = 2736$$

$$36(x^2 + 4x + 4) - 64(y^2 - 6y + 9) = 2736 + 144 - 576$$

$$36(x + 2)^2 - 64(y - 3)^2 = 2304$$

$$\frac{36(x+2)^2}{2304} - \frac{64(y-3)^2}{2034} = \frac{2304}{2304}$$

a) La ecuación de la hipérbola en forma ordinaria es:

$$\frac{(x+2)^2}{64} - \frac{(y-3)^2}{36} = 1$$

b) Las coordenadas del centro de la hipérbola son: $C\,(-2, 3)$

c) La longitud del eje transverso:

Si $a^2 = 64, a = 8$, por lo tanto: $2a = 16$

d) La longitud del eje conjugado:

Si $b^2 = 36, b = 6$, por lo tanto: $2b = 12$

e) La ecuación de sus asíntotas: $h = -2$ y $k = 3$

$$\lambda \rightarrow (y-3) = \frac{3}{4}(x+2), \qquad \lambda' \rightarrow (y-3) = -\frac{3}{4}(x+2)$$

f) Para determinar la excentricidad, se requiere utilizar la relación fundamental:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Por lo tanto

$$e = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} > 1$$

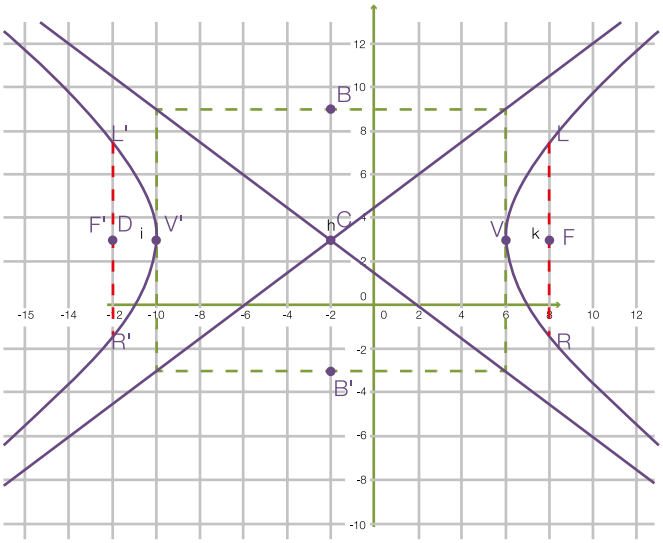
g) Las coordenadas de los vértices:

$$V(-2 + 8, 3) \qquad V'(6, 3)$$
$$V(-2 - 8, 3) \qquad V'(-10, 3)$$

h) Las coordenadas de los focos:

$$F(-2 + 10, 3) \qquad F(8, 3)$$
$$F'(-2 - 10, 3) \qquad F'(-12, 3)$$

i) La gráfica está dada en la forma:




Ejercicio
Módulo 4

A partir de la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$, determinar:

a) La ecuación de la hipérbola en forma ordinaria
b) Las coordenadas del centro
c) La longitud del eje transverso
d) La longitud del eje conjugado
e) La ecuación de sus asíntotas
f) La excentricidad
g) Las coordenadas de los vértices
h) Las coordenadas de los focos
i) Trazar la gráfica

**R:** $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

$C(3,2)$

Eje transversal: 8
Eje conj. 6

Asíntoras: $\lambda \Rightarrow (y-2) = \dfrac{3}{4}(x-3),$

$\lambda' \Rightarrow (y-2) = -\dfrac{3}{4}(x-3)$

$e = \dfrac{5}{4} > 1$

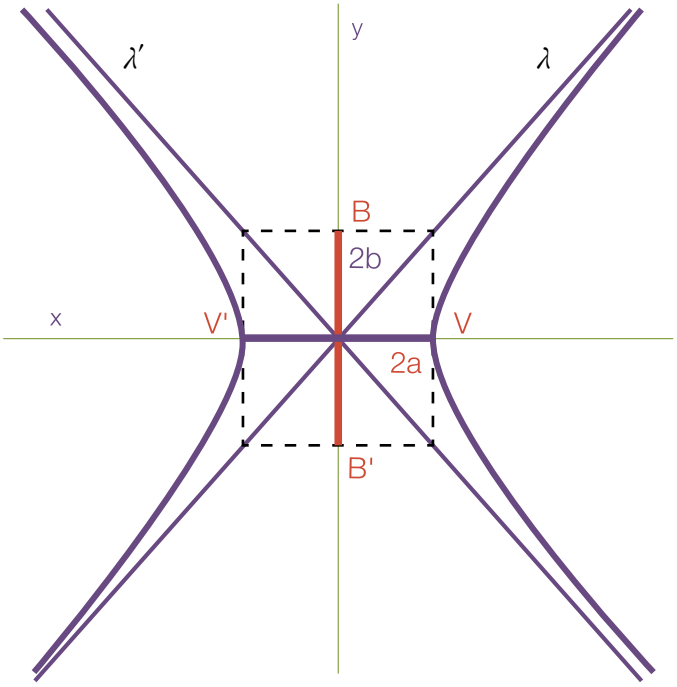
$V(7,2), V'(-1,2)$

$F(8,2), F'(-2,2)$

# 6. Asíntotas de la Hipérbola

La asíntota es una recta que limita una curva de tal manera que, en la medida crece, la distancia entre ambas disminuye continuamente y tiende a cero.

La hipérbola no tiene asíntotas horizontales ni verticales, pero sí tiene dos oblicuas, las cuales son rectas determinadas por las diagonales del rectángulo auxiliar de lados $2a$ y $2b$.






| | |
|---|---|
| Asíntota de la hipérbola con centro en el origen y eje que coincide con el eje $X$. | $\lambda: y = \frac{b}{a}x$<br>$\lambda': y = -\frac{b}{a}x$ |
| Asíntota de la hipérbola con centro en el origen y que coincide con el eje $Y$. | $\lambda: y = \frac{a}{b}x$<br>$\lambda': y = -\frac{a}{b}x$ |

**Ejemplo**

Los vértices de una hipérbola están en $V(4,0)$ y $V'(-4,0)$ y sus focos $F(6,0)$ y $F'(-6,0)$. Determinar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad, la longitud de cada lado recto, las ecuaciones de las asíntotas y trazar su gráfica.

### Solución

Datos: $V(4,0)$ y $V'(-4,0)$, $F(6,0)$ y $F'(-6,0)$

Con los datos anteriores, se observa que se trata de una hipérbola con centro en el origen y eje focal que coincide con el eje *X*. Por lo tanto, su ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donde:

$$a=4$$
$$c=6$$

Utilizando la relación fundamental:

$$c^2=a^2+b^2$$
$$b=\sqrt{c^2-a^2}$$
$$b=\sqrt{6^2-4^2}$$
$$b=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}$$

Los valores son: $a=4, c=6$ y $b=\sqrt{20}$

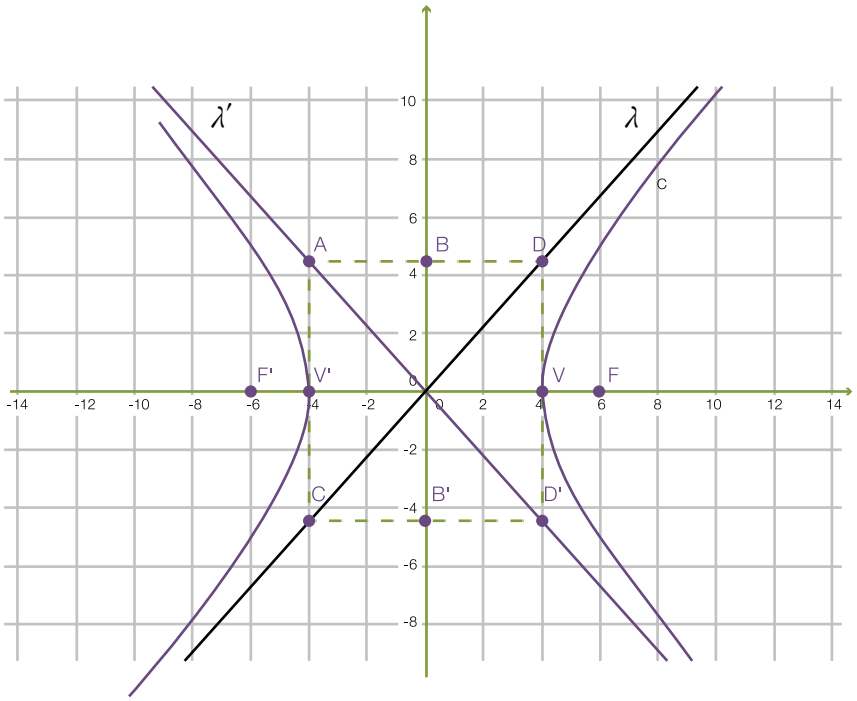
Con lo anterior, se determina la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{(4)^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{20})^2}=1$$
$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$$

Obteniendo los elementos, se tiene:

| | | |
|---|---|---|
| **Extremos del eje conjugado** | $B(0,b), B(0,\sqrt{20})$ | $B'(0,-b), B'(0,-\sqrt{20})$ |
| **Asíntotas** | $\lambda: y=\frac{b}{a}x$<br>$\lambda: y=\frac{\sqrt{20}}{4}x$ | $\lambda': y=\frac{b}{a}x$<br>$\lambda': y=-\frac{\sqrt{20}}{4}x$ |
| **Lado recto** | $\lvert LR\rvert=\frac{2b^2}{a}$ | $\lvert LR\rvert=\frac{2(\sqrt{20})^2}{4}=\frac{40}{4}=10$ |
| **Eje transverso** | $\overline{VV'}=2a$ | $\overline{VV'}=2(4)=8$ |
| **Eje focal** | $\overline{FF'}=2c$ | $\overline{FF'}=2(6)=12$ |
| **Eje conjugado** | $\overline{BB'}=2b$ | $\overline{BB'}=2(\sqrt{20})=2\sqrt{20}$ |
| **Excentricidad** | $e=\frac{c}{a}>1$ | $e=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}>1$ |

Gráficamente:




M4
Basado en competencias

**Ejemplo**

Los vértices de una hipérbola están en los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$, con una excentricidad de 2. Determinar la ecuación correspondiente, las coordenadas de los focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, su excentricidad, la longitud de cada lado recto, las ecuaciones de las asíntotas y trazar su gráfica.

Solución
Datos: $V(0,2), V'(0,-2), e=2$.

Con los datos anteriores, se observa que se trata de una hipérbola con centro en el origen y eje focal que coincide con el eje Y. Por lo tanto, su ecuación es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Donde:

$a=2$

$e=2$

Recuérdese que la expresión para la excentricidad es: $e=\frac{c}{a}>1$

Se sustituyen los valores conocidos hasta el momento:

$2=\frac{c}{2}$ Despejando la expresión se tiene que: $c=4$

Utilizando la relación fundamental:

$c^2 = a^2 + b^2$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{4^2 - 2^2}$

$b = \sqrt{16 - 4}$

$b = \sqrt{12}$

Los valores son: $a = 2, c = 4$ y $b = \sqrt{12}$

Con lo anterior, se determina la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

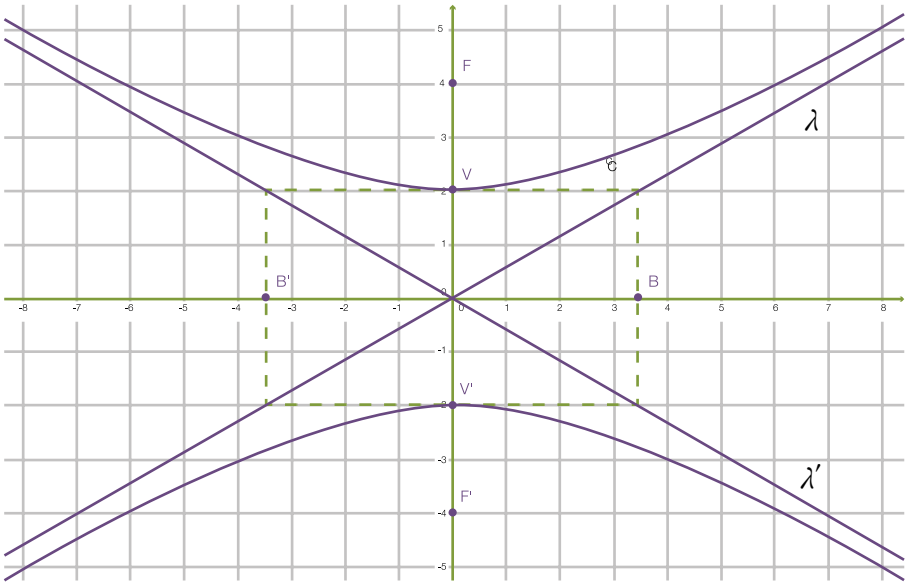
$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{12})^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$

Obteniendo los elementos, se tiene que:

| | | |
|---|---|---|
| **Focos** | $F(0,c), F(0,4)$ | $F'(0,-c), F'(0,-4)$ |
| **Extremos del eje conjugado** | $B(b,0), B(\sqrt{12},0)$ | $B'(-b,0), B'(-\sqrt{12},0)$ |
| **Asíntotas** | $\lambda: y = \frac{a}{b}x$<br>$\lambda: y = \frac{2}{\sqrt{12}}x$ | $\lambda': y = -\frac{a}{b}x$<br>$\lambda': y = -\frac{2}{\sqrt{12}}x$ |
| **Lado recto** | $\lvert LR \rvert = \frac{2b^2}{a}$ | $\lvert LR \rvert = \frac{2(\sqrt{12})^2}{2} = \frac{24}{2} = 12$ |
| **Eje transverso** | $\overline{VV'} = 2a$ | $\overline{VV'} = 2(2) = 4$ |
| **Eje focal** | $\overline{FF'} = 2c$ | $\overline{FF'} = 2(4) = 8$ |
| **Eje conjugado** | $\overline{BB'} = 2b$ | $\overline{BB'} = 2(\sqrt{12}) = 2\sqrt{12}$ |

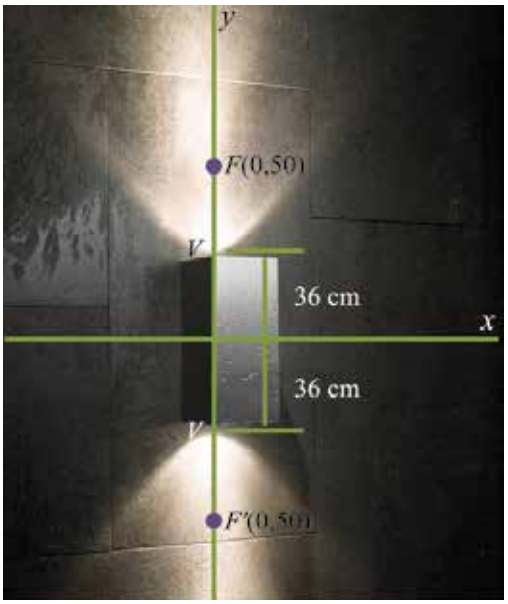
Gráficamente:






## 6. Determinación de la ecuación de una hipérbola sujeta a condiciones dadas

En la figura, se muestra una lámpara de tal forma que la iluminación proyecta una forma hiperbólica. Considerando el centro de la misma en el origen, y con los datos proporcionados, determinar lo siguiente:




a) Vértices y focos.
b) La ecuación canónica
c) El valor del lado recto
d) Ecuación de las asíntotas

## Solución

a) Las coordenadas del centro, el vértice y los focos ya se han proporcionado:

$V(0,36), V'(0,-36), F(0,50), F'(0,-50)$

Se utiliza la relación fundamental:

$c^2 = a^2 + b^2$

Despejando la variable $b$:

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Sustituye los valores de $a = 36$ y $c = 50$

$b = \sqrt{50^2 - 36^2}$

$b = \sqrt{2500 - 1296}$

$b = \sqrt{1204} = 34.69$

b) Como se trata de una hipérbola vertical, utilizamos la siguiente ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{y^2}{36^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{1204})^2} = 1$$

La ecuación de la hipérbola es la siguiente:

$$\frac{y^2}{1296} - \frac{x^2}{1204} = 1$$

c) Lado recto:

$$|L.R| = \frac{2b^2}{a}$$

$$|L.R| = \frac{2(\sqrt{1204})^2}{36}$$

$$|L.R| = \frac{2(1204)}{36}$$

$$|L.R| = \frac{2(2408)}{36}$$

$$|L.R| = 66.88\ cm.$$

d) Para determinar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola con los valores de $a$ y $b$, se sustituyen en las ecuaciones siguientes:

$\lambda: y = \frac{a}{b}x$ $\qquad$ $\lambda: y = \frac{\sqrt{1204}}{36}x$

$\lambda': y = -\frac{a}{b}x$ $\qquad$ $\lambda': y = -\frac{\sqrt{1204}}{36}x$

Ejercicio
Módulo 4

1. Los focos de una hipérbola están en los puntos $(0,7)$ y $(0,-7)$ y la longitud del eje conjugado es $6$. Determinar su ecuación, las coordenadas de los vértices, la longitud del eje transverso, su excentricidad, la longitud de cada lado recto y trazar su gráfica.

R: $\frac{y^2}{40}-\frac{x^2}{9}=1,\ V(0,\sqrt{40}),\ V'(0,-\sqrt{40}),\ \overline{VV'}=2\sqrt{40},\ e=\frac{7}{\sqrt{40}}>1,\ LR=\frac{18}{\sqrt{40}}$

M4
Basado en competencias

2. Determinar la ecuación de la hipérbola, en su forma canónica, que cumple con las condiciones dadas:
   a) Los vértices están en $V(3,0)$ y $V'(-3,0)$ y sus focos son $F(6,0)$ y $F'(-6,0)$

R: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{48}=1$

   b) Los focos están en los puntos $(0,8)$ y $(0,-8)$ y la longitud del eje transverso es $8$.

R: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{49}=1$

3. A partir de las ecuaciones dadas, determinar las coordenadas de los vértices, las coordenadas de los focos, la longitud del eje conjugado, la longitud del eje transverso, la longitud del lado recto, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y trazar su gráfica.

   a) $4x^2 - 9y^2 = 36$

**R:** $V(3,0),\ V'(-3,0), F(\sqrt{13}, 0), F'(-\sqrt{13}, 0), BB' = 4, VV' = 6, LR = \frac{8}{3}, e = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$

$$y = \frac{2}{3}x,\ y = -\frac{2}{3}x$$

   b) $9y^2 - 16x^2 = 144$

**R:**

$$V(0,4), V'(0,-4), F(0,5), F'(0,-5), VV' = 8, BB' = 6, LR = 4.5, 4x - 3y = 0, 4x + 3y = 0$$

   c) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$

**R:**

$$V(9,0), V'(-9,0), F(\sqrt{90},0), F'(-\sqrt{90},0), VV' = 18, BB' = 6, LR = 2, y = \frac{1}{3}x,\ y = -\frac{1}{3}x$$

Ejercicios

# Ejercicios adicionales

1. Determinar la ecuación de la hipérbola, en su forma canónica, que cumple con las condiciones dadas:
   - Un vértice en $(-5,0)$ y la longitud del lado recto es igual a $10$.

     R: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1$

   - Eje transverso sobre el eje $X$ igual a $10$ y distancia entre focos igual a $18$.

     R: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{56}=1$

   - Eje transverso sobre el eje $Y$, un foco $(0,5)$ y la excentricidad es igual a $3$.

     R: $\frac{y^2}{\frac{25}{9}}-\frac{x^2}{\frac{200}{9}}=1$

2. A partir de las siguientes ecuaciones, determinar las coordenadas de los vértices, las coordenadas de los focos, la longitud del eje conjugado, la longitud del eje transverso, la longitud del lado recto, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y trazar su gráfica.
   - $5y^2-16x^2+400=0$

     R:

     $V(5,0), V'(-5,0), F(\sqrt{105},0), F'(-\sqrt{105},0), VV'=10, BB'=2\sqrt{80}, LR=32, y=\frac{\sqrt{80}}{5}x, y=-\frac{\sqrt{80}}{5}x,$

   - $5y^2-4x^2-20=0$

     R:

     $V(0,2), V'(0,-2), F(0,3), F'(0,-3), VV'=4, BB'=2\sqrt{5}, LR=5, e=\frac{3}{2}>1$

     $y=\frac{2}{\sqrt{5}}x, y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x$

   - $16x^2-25y^2+400=0$

     R:

     $V(0,4), V'(0,-4), F(0,\sqrt{41}), F'(0,-\sqrt{41}), VV'=8,\ BB'\ 10,\ LR=\frac{25}{2}, \mathrm{e}=\frac{\sqrt{41}}{4}>1$

     $y=\frac{4}{5}x, y=-\frac{4}{5}x$

   - $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

     R:

     $V(5,0), V'(-5,0), F(\sqrt{14},0), F'(-\sqrt{14},0), VV'=10, BB'=6, LR=3.6, y=\frac{3}{5}x, y=-\frac{3}{5}x$

- $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$

**R:**

$V(12,0),\ V'(-12,0),\ F(13,0),\ F'(-13,0),\ VV'=24,\ BB'=10,\ LR=4.17,\ e=\frac{13}{12}>1,$

$y=\frac{5}{12}x,\ y=-\frac{5}{12}x$

3. Determinar los elementos de las hipérbolas cuya ecuación se indica:

a) $\frac{(x+6)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$

**R:**

$C(-6,2),V(-1,2),V'(-11,2),F(-0.17,2)F'(-11.83,2),VV'=10,\ BB=6,\ LR=\frac{18}{5}$

b) $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{7}=1$

**R:**

$C(2,1),\ V(2,4),\ V'(2,-2),\ F(2,5),\ F'(2,-3),VV'=6,\ BB'=5.29,\ LR=4.66,\ e=\frac{4}{3}>1,$

$(y=-1)=\frac{3}{\sqrt{7}}(x-2),\ (y-1)=-\frac{3}{\sqrt{7}}(x-2)$

4. Transformar las ecuaciones ordinarias de la hipérbola a su forma general:

a) $\frac{(x-10)^2}{144}-\frac{(y+8)^2}{100}=1$

**R:** $100x^2-144y^2-2000x-2304y-13616=0$

b) $\frac{(y+7)^2}{6}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$

**R:** $4y^2-6x^2+36x+56y+118=0$

5. Determinar los elementos de las hipérbolas cuya ecuación se indica:

a) $2x^2-y^2+28x-2y+95=0$

**R:**

$C(-7,-1),\ V(-8,-1),\ V'(-8,-1),\ V(-6,-1),\ F(-5,271,-1),F'=(-8.73,-1),\ VV'=2\ \ BB'=2\sqrt{7}\ ,\ LR=4,$

$e=\sqrt{3}\ >1,\ (y+1)=\sqrt{2}\ (x+7),\ (y+1)=-\sqrt{2}\ (x+7)$

b) $16y^2-9x^2-32y+54x-209=0$

**R:**

$C(-3,1),\ V(-3,4),\ V'(-3,-2),\ F(-3,6),\ F'(-3,-4),\ VV'=6,\ BB'=8,\ LR=10.66,$

$e=\frac{5}{3}>1,\ (y-1)=\frac{3}{4}(x+3),\ \ (y-1)=-\frac{3}{4}(x+3)$

# Bibliografía


Baldor, Aurelio (1994), *Álgebra*, Publicaciones Cultural. México.

Edwards, C.H. & Penney, D. (1996) *Cálculo con geometría analítica*, Editorial Pearson. México.

Filloy, E. y Hitt, F. (1997) *Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamericana, México.

Leithold, Louis. (1986) *El Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Harla, México.

Lehmann. (1998) *Geometría analítica*. Editorial Limusa, México.

Purcell, Varberg. (1987) *Calculo con Geometría Analítica*, Editorial P.H.M. Prentic Hall, México.

Swokowski, Cole. (1996) *Álgebra y Trigonometría con Geometría analítica*, Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Stewart, J. (2002) *Cálculo - trascendentes tempranas*. Editorial Thomson. México.

Thomas, G. (2006) *Cálculo - varias variables*. Editorial Pearson. México.


# Índice de imágenes

### Portada / Portadilla

*Siena, Italia (2016)* Foto por: David Siglin, extraída de Unsplash; URL: https://unsplash.com/photos/szVTlkisN1M consultado el 21 de noviembre de 2016.

### Módulo 1

*Anne Patterson "Agraciados con la luz",* extraída de Yelowtracer, URL: http://assets.yellowtrace.com.au/wp-content/uploads/2014/08/20-Miles-of-Ribbon-by-Anne-Patterson-Yellowtrace-03.jpg consultado el 01 de diciembre de 2016.

Imagen 1. Coordenadas, extraída de Geofumadas, URL: http://www.geofumadas.com/wp-content/uploads/2011/05/coordenadas1.jpg consultado el 16 de diciembre de 2016.

Imagen 2. Ángulos de inclinación de distintas rectas, extraída de blogspot, URL: https://4.bp.blogspot.com/-I1aSZE-NelWE/Uiz0VADXKbI/AAAAAAAAHKY/0sAKw6CQEJs/s640/%C3%A1ngulo+de+inclinaci%C3%B3n.jpg consultado el 16 de diciembre de 2016.

Imagen 3. Pendientes de distintas rectas, extraída de blogspot, URL: https://4.bp.blogspot.com/-5TbA4Sv3ijA/Uiz0Q-0gxjCI/AAAAAAAAHKQ/j_DfDV36pAs/s640/pendientes.jpg consultado el 16 de diciembre de 2016.

### Módulo 2

*Gabriel Dawe's 'Plexus 28'*, extraída de CubeBreaker, URL: http://www.cubebreaker.com/wp-content/uploads/2014/10/gabriel-dawes-plexus-28-02.jpg consultado el 02 de diciembre de 2016.

### Módulo 3

*Gabriel Dawe's 'Plexus 27'*, extraída de gabriel dawe, URL: http://www.gabrieldawe.com/Images/_W_PLEXUS-27_P1010417.jpg consultado el 02 de diciembre de 2016.

Imagen 1. Movimiento parábolico, extraída de Universo Formulas, elaboración: Juan Eleuterio Cristóbal, 16 de diciembre de 2016.

Imagen 2. Estufa solar parábolica, extraída de FUDETEC, URL: http://www.fudetec.org.mx/images/estufa-solar-parabolica.png consultado el 19 de diciembre de 2016.

## Módulo 4

*Gabriel Dawe's 'Plexus 19'*, extraída de gabriel dawe, URL: https://www.gabrieldawe.com/plexus-no-19 consultado el 15 de octubre de 2023.

# Directorio

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
***Rector***

Doctor en Ciencias Computacionales
José Raymundo Marcial Romero
***Secretario de Docencia***

Doctora en Ciencias Sociales
Patricia Zarza Delgado
***Secretaria de Investigación y Estudios Avanzados***

Doctor en Ciencias de la Educación
Marco Aurelio Cienfuegos Terrón
***Secretario de Rectoría***

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
***Secretaria de Difusión Cultural***

Doctor en Ciencias del Agua
Francisco Zepeda Mondragón
***Secretario de Extensión y Vinculación***

Doctor en Educación
Octavio Crisóforo Bernal Ramos
***Secretario de Finanzas***

Doctora en Ciencias Económico Administrativas
Eréndira Fierro Moreno
***Secretaria de Administración***

Doctora en Ciencias Administrativas
María Esther Aurora Contreras Lara Vega
***Secretaria de Planeación y Desarrollo Institucional***

Doctora en Derecho
Luz María Consuelo Jaimes Legorreta
***Abogada General***

Doctor en Ciencias Sociales
Luis Raúl Ortíz Ramírez
***Secretario Técnico de la Rectoría***

Licenciada en Comunicación
Ginarely Valencia Alcántara
***Directora General de Comunicación Universitaria***

Doctor en Ciencias Sociales
Luis Raúl Ortiz Ramírez
***Director de Centros Universitarios y Unidades Académicas Profesionales Región A y Encargado del Despacho Región B***

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
***Directora de Estudios de Nivel Medio Superior***

# Planteles Dependientes
## de la Escuela Preparatoria

Doctor en Tecnología e Innovación de la Educación
Arturo Mejía Zamora
***Plantel "Lic. Adolfo López Mateos"***

Maestro en Ciencias de la Educación
Erick Vieyra Méndez
***Plantel "Nezahualcóyotl"***

Maestro en Administración Pública y Gobierno
Raúl Juárez Toledo
***Plantel "Cuauhtémoc"***

Doctora en Ciencias de la Educación
María del Rocío García de León Pastrana
***Plantel "Ignacio Ramírez Calzada"***

Doctor en Ciencias de la Educación
Alejandro Morales Velázquez
***Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana"***

Maestro en Educación con Orientación en Innovación y Tecnología Educativa
Sergio Luis Roldán Vásquez
***Plantel "Texcoco***

Maestro en Docencia
Erick Rodolfo Sánchez Cortés
***Plantel "Sor Juana Inés de la Cruz"***

Química Farmacéutica Bióloga
Janette Jaimes García
***Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Dr. Pablo González Casanova***

Doctora en Educación
María del Rosario Sotelo Hurtado
***Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Isidro Fabela Alfaro"***

Licenciada en Comunicación
Ana Vianey Suárez Castro
***Encargada del Despacho de la Dirección del Plantel "Mtro. José Ignacio Pichardo Pagaza"***